

**UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ**



**"ELECTROMAGNETISMO"**

**Autores: María Ester Onell Sequeira**

**: Edmundo Lazo Núñez**

**Departamento de Física**

**Facultad de Ciencias**

**Arica-Chile**

**2015**

## ÍNDICE

### **Unidad I: Electrostática**

1.1 Introducción general	005
1.2 Ley de Coulomb	007
1.3 Principio de Superposición	009
1.4 Teorema de fuentes y sumideros	010
1.5 Campo eléctrico	012
1.6 Campo eléctrico creado por un conjunto discreto de cargas	013
1.7 Campo eléctrico creado por una distribución continua de cargas	014
1.8 Diferencia de Potencial electrostático	017
1.9 Potencial electrostático creado por un conjunto discreto de cargas	018
1.10 Potencial eléctrico creado por una distribución continua de cargas	022
1.11 Conductores y aisladores	026
1.12 Problemas Resueltos	029

### **Unidad II: Ley de Gauss**

2.1 Ley de Gauss	051
2.2 Forma diferencial de la ley de Gauss	054
2.3 Ley de Gauss con dieléctricos	055
2.4 Aplicaciones de la ley de Gauss	056
2.5 Problemas Resueltos	057

### **Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff**

3.1 Capacitancia y condensadores	089
3.2 Condensador de placas paralelas	090
3.3 Condensador esférico	091
3.4 Condensadores conectados en serie	093
3.5 Condensadores conectados en paralelo	094
3.6 Energía almacenada en el condensador	095
3.7 Corriente y Resistencia	096
3.8 Ley de Ohm microscópica	101

3.9 Ley de Ohm macroscópica	102
3.10 Resistencias conectadas en serie	104
3.11 Resistencias conectadas en paralelo	104
3.12 Fuerza electromotriz (Fem $\mathcal{E}$ )	105
3.13 Circuitos eléctricos	107
3.14 Segmento de circuito	108
3.15 Leyes de Kirchhoff	110
3.16 Problemas Resueltos	113
 <b>Unidad IV: Magnetismo</b>	
4.1 Campo magnético	125
4.2 Fuerza magnética sobre partícula cargada	125
4.3 Trabajo de la fuerza magnética	127
4.4 Ley de Biot y Savart	129
4.5 Ley de Ampere	131
4.6 Inducción electromagnética	134
4.7 Problemas Resueltos	139
5.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas	191
5.2 Unidad II: Solucionario de Pruebas	231
5.3 Unidad III: Solucionario de Pruebas	277
5.4 Unidad IV: Solucionario de Pruebas	307
6.1 Guías de Laboratorio	371

## PRESENTACIÓN

El presente Dossier, denominado Electromagnetismo, fue concebido fundamentalmente para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Electromagnetismo (FI-604) de todas las Carreras de Ingeniería Ejecución y Civil. Sin embargo, este material pedagógico también sirve para otras carreras de la universidad en las cuales el electromagnetismo es una de las asignaturas del curriculum de las siguientes carreras: Pedagogía en Física y Matemática, Agronomía y Tecnología Médica.

Es importante destacar que la forma, el grado de desarrollo y el nivel matemático con el cual está redactado el Dossier, es básicamente el mismo nivel con el cual se desarrollan las clases expositivas en las carreras de ingeniería. Esto puede servir para que los estudiantes puedan contar con un apunte de clases y no deban preocuparse por tomar notas muy elaboradas. Esto permitirá que los alumnos, en cada clase, se puedan dedicar al proceso de comprensión de las materias correspondientes al curso de Electromagnetismo.

Si el nivel matemático del Dossier es un poco avanzado, o diferente del empleado en otras carreras, de todas maneras el Dossier puede ser una herramienta útil para el estudio individual de los alumnos, ya que los problemas resueltos y los solucionarios de las pruebas, han sido realizados con mucho detalle, explicando las razones físicas por las cuales se realiza cada uno de los pasos del desarrollo.

Este Dossier está organizado según cuatro unidades que engloban temas con fuerte relación entre sí. En el programa de la asignatura estas cuatro unidades no tienen nombre, pero para efectos de la mejor clasificación y mejor ubicación de la materia por parte del alumno, le hemos puesto un nombre específico, a saber,

Unidad I: Electrostática

Unidad II: Ley de Gauss

Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

Unidad IV: Magnetismo

En cada unidad hemos colocado apuntes de materia con los tópicos más relevantes; a continuación hemos colocado un conjunto de problemas resueltos con todo detalle y con muchas explicaciones. Algunos de los problemas resueltos también aparecen más adelante en

la sección Solucionario de Pruebas. La razón de dicha repetición, dice relación con que no siempre en los solucionarios se emplean explicaciones tan detalladas como en los problemas resueltos. Además, así el alumno sabe que los problemas resueltos son del mismo tipo de problemas que se preguntan en las pruebas de cátedra.

Al final de las cuatro unidades desarrolladas con sus problemas resueltos, hemos puesto una selección de algunas pruebas resueltas en años anteriores. Además, finalizamos este Dossier con una selección de Guías de Laboratorio, para que el estudiante pueda prepararse en la teoría de cada sesión de Laboratorio.



## 2.1 Programa vigente de la asignatura Electromagnetismo FI-604.

Universidad de Tarapacá

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

### PROGRAMA DE ASIGNATURA

<b>I.</b>	<b>IDENTIFICACIÓN</b>
ALUMNO : SEMESTRE CURRICULAR :	
ASIGNATURA : ELECTROMAGNETISMO CÓDIGO : FI-604 No. HORAS SEMANALES : SEIS (4,0,2) PRE-REQUISITO : MÉCANICA CLÁSICA, ALGEBRA II, CÁLCULO II. CARRERA : INGENIERÍA PLAN COMÚN PROFESOR : MSc. María Ester Onell Sequeira PROFESOR DE LABORATORIO : MSc. María Ester Onell Sequeira AYUDANTE: SEMESTRE ACADÉMICO : I SEMESTRE 2015	

<b>II.</b>	<b>OBJETIVOS GENERALES</b>
Al finalizar el curso, el alumno debe ser capaz de:	

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

1. Formular las ecuaciones del electromagnetismo en lenguaje vectorial.
2. Describir los comportamientos eléctricos y magnéticos en el vacío y en materiales, usando las leyes de Maxwell.

### **III. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

1. Aplicar la ley de Coulomb para calcular campos eléctricos estáticos.
2. Aplicar el concepto de potencial electrostático en la resolución de problemas.
3. Aplicar la Ley de Gauss para dieléctricos.
4. Enunciar y aplicar la Ley de Ohm.
5. Definir y aplicar la expresión para la fuerza de Lorentz.
6. Aplicar la Ley de Ampere.
7. Aplicar la Ley de Biot-Savart.
8. Aplicar la Ley de Gauss del Magnetismo.
9. Aplicar el concepto de flujo magnético para formular la Ley de Faraday.
10. Aplicar la Ley de Ampere-Maxwell.
11. Escribir las ecuaciones de Maxwell.

### **IV. CONTENIDOS PROGRAMÁTICOS**

#### **Unidad I**

1. Carga eléctrica. Conservación y Cuantización.
2. Conductores, aisladores y semiconductores.
3. Ley de Coulomb. Principio de superposición.
4. Campo eléctrico. Intensidad de campo eléctrico. Cálculo de campos eléctricos.
5. Potencial eléctrico. Relación entre potencial y campo eléctrico.
6. Potencial debido a una carga puntual. Principio de Superposición. Aplicaciones
7. Energía potencial electrostática.

#### **Unidad II**

8. Flujo del campo eléctrico. Ley de Gauss. Propiedades de los conductores en equilibrio electrostático.



9. Dieléctricos. Campo electrostático en medios dieléctricos. Aplicaciones. Condensadores. Almacenamiento de energía en un campo eléctrico.

**Unidad III**

10. Corriente y densidad de corriente. Ecuación de continuidad. Resistencia. Resistividad. Conductividad. Ley de Ohm.
11. Fuerza electromotriz. Circuitos eléctricos y Leyes de Kirchhoff.

**Unidad IV**

12. Campo magnético. Fuerza de Lorentz.
13. Fuerza magnética sobre alambres con corriente.
14. Ley de Biot-Savart.
15. Ley de Ampere.
16. Flujo magnético.
17. Ley de Inducción de Faraday-Lenz.
18. Campos magnéticos variables en el tiempo.
19. Relaciones entre electricidad y magnetismo. Ecuaciones de Maxwell.

**V. ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**

- Clases teóricas
- Sesiones de Laboratorio (100% Asistencia)
- Ayudantías.

**VI. SISTEMA DE EVALUACIÓN**

- 3 Pruebas de Cátedra: 25%, 25%, 25%.
- Promedio de Notas de Laboratorio: 25%.
- Prueba Recuperativa u Optativa según Reglamento de Docencia: 40 %

## **VII.**

## **BIBLIOGRAFÍA**

### **Básica:**

1. F. W. Sears, M. Zemansky, H. Young, “Física Universitaria”. ED. Addison-Wesley, 1998.
2. R. Serway, R. Beichner, “Física para Ciencias e Ingeniería”. Vol. 2, Ed. Mc Graw-Hill, 2002.
3. P. Fishbane, S. Gasiorowicz, “Física para Ciencias e Ingeniería”. Vol. 2, Ed. Prentice Hall, 1994.

### **Complementaria:**

4. M. Alonso, E. Finn, “Física”. Vol 2, Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1976.
5. D. Halliday, R. Resnick, K. Krane, “Física”. Vol 2, Ed. CECSA, 2002.
6. R. Benguria, M. C. Depassier, M. Favre, “Problemas Resueltos de Electricidad y Magnetismo”, Ed. Universidad Católica de Chile, 1998.
7. A. M. Ribeiro da Luz, B. Alvarenga, “Física General con Experimentos Sencillos”, Ed. Oxford University Press, 1998.

### **Electromagnetismo en la WEB**

Curso del Profesor Ángel Franco García:

**Página Web:** <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

---

En esta unidad se estudia el comportamiento del campo eléctrico producido por cargas eléctricas discretas y distribuciones continuas de carga en reposo relativo. Se discute la ley de Coulomb, el Principio de Superposición y la Ley de Gauss. También se estudia la formulación alternativa usando el concepto de Potencial electrostático. Se hace énfasis en la formulación vectorial de los conceptos y en la resolución de problemas.

#### 1.- Introducción general

Nuestro universo está constituido, fundamentalmente, por materia (partículas) y radiación (ondas). La materia está constituida por átomos y moléculas. Los átomos son partículas muy pequeñas de un tamaño aproximado de  $10^{-10}[m]$  y están constituidos por una región central llamada núcleo, formada por protones y neutrones (salvo el átomo de Hidrógeno que no posee ningún neutrón) y rodeada de una nube electrónica. Una de las características del átomo que más nos importan en este curso es la carga eléctrica. Esta característica o propiedad de la materia o de los átomos se hace presente en dos de los constituyentes del átomo:

protón: partícula con carga positiva ( $1.60217733 \times 10^{-19} [Coulomb]$ )

electrón: partícula con carga negativa ( $-1.60217733 \times 10^{-19} [Coulomb]$ )

neutrón: partícula sin carga.

Otra interesante propiedad de los átomos aislados es que su carga total o carga neta  $Q_T$ , es

exactamente igual a cero, es decir, el átomo siempre es neutro,  $Q_T = \sum_j q_j = 0$ . Es

importante destacar que  $Q_T$  se puede escribir como la suma de todas las cargas positivas

$Q_+ = \sum_{j=1}^N q_j^+$  presentes en el núcleo debido a los protones, y de todas las cargas negativas

$Q_- = \sum_{j=1}^N q_j^-$  que poseen los electrones que orbitan al núcleo, es decir,

$$Q_T = \sum_{j=1}^N q_j^+ + \sum_{j=1}^N q_j^- = 0.$$

### 2.2.1 Unidad I: Electroestática

Por lo tanto, para conseguir hacer presente la propiedad de la carga en un átomo aislado, debemos hacerlo interaccionar con otra partícula o sistema, de modo de conseguir quitarle o agregarle electrones, quedando de esta manera con un desbalance de uno de los tipos de carga. Cuando este desbalance ocurre, se pone en evidencia un comportamiento característico de los cuerpos cargados: *las propiedades electromagnéticas en las cercanías de un cuerpo cargado, cambian, varían, o en general, se ven alteradas.*

La carga eléctrica posee varias propiedades muy interesantes:

- a) *la carga libre está cuantizada*, es decir, en la naturaleza, la carga libre más pequeña o fundamental que existe, es la carga del electrón o del proton, es decir,  $|q_{free}| = 1.60217733 \times 10^{-19} [C]$ , donde  $[C]$  se denomina Coulomb. La carga total  $Q$  de cualquier sistema es la suma algebraica de las cargas elementales  $q_{free}$  presentes en el sistema, es decir, es la suma de un número entero de unidades elementales de carga eléctrica.
- b) Existen dos tipos de carga eléctrica: positivas (protón) y negativas (electrón).
- c) Las cargas de distinto signo se atraen y las cargas de igual signo se repelen. Este proceso define la interacción eléctrica.
- d) La interacción eléctrica entre dos cuerpos cargados, depende del estado de movimiento de los cuerpos cargados en interacción.
- e) Cargas en reposo o en movimiento relativo constante producen campos electrostáticos y cargas moviéndose con velocidad constante producen corriente eléctrica y esta corriente eléctrica genera campos magnetostáticos.
- f) La carga eléctrica se conserva en un sistema cerrado.

Cuando las cargas eléctricas interactúan entre sí, aparece *una acción a distancia* llamada *campo eléctrico*  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y *campo magnético*  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . En general, estos campos vectoriales dependen de la posición del observador  $\vec{r}$  y del tiempo  $t$ . Para ciertos casos particulares, los campos no dependen del tiempo y las corrientes eléctricas son constantes. Cuando esto ocurre, las teorías físicas que describen la interacción electromagnética son más sencillas y se llaman electrostática y magnetostática, respectivamente. En nuestro curso, estos serán los casos que estudiaremos en primer lugar dado el grado de simplicidad de las leyes físicas involucradas. Posteriormente estudiaremos los elementos fundamentales de la

electrodinámica, cuando los campos eléctrico y magnético presenten variación en el tiempo.

En este curso queremos estudiar el comportamiento de los cuerpos cargados, cuando interaccionan entre sí, o cuando interaccionan con algún tipo de radiación electromagnética.

## 2.- Ley de Coulomb

Para percibir la existencia de fenómenos de tipo eléctrico debemos poner en interacción dos o más cuerpos cargados. Estudios experimentales realizados por Coulomb y otros investigadores durante el siglo diecinueve, permiten enunciar la llamada ley de Coulomb, la cual da cuenta de la magnitud y dirección de la fuerza  $\vec{F}_{12}$  ejercida entre dos *partículas cargadas en reposo relativo*,  $q_1$  y  $q_2$ , como se muestra en la Fig. 1.1.

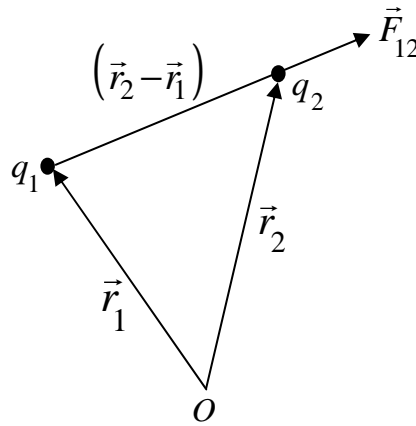


Figura 1.1 Fuerza Coulombiana entre cargas puntuales en reposo.

*Experimentalmente se ha demostrado* que la fuerza ejercida por la carga  $q_1$  sobre la carga  $q_2$ , se puede escribir en la forma:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \hat{e}_{r_{12}} \quad (1.1)$$

Los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  definen las posiciones de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  con respecto al origen del sistema de coordenadas que se muestra en la Fig. 1.1. En la relación (1.1) el vector

$\hat{e}_{r_{12}} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$  representa un vector unitario a lo largo de la línea que une los centros de las

cargas puntuales. El valor de la constante  $k$  depende del sistema de unidades empleado, y

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

se define en la forma  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Nm^2}{C^2} \right] = 8,9874 \times 10^9 \left[ \frac{Nm^2}{C^2} \right]$ . La constante  $\epsilon_0$  se denomina *permitividad eléctrica del vacío* y su valor es:  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \left[ \frac{C^2}{Nm^2} \right]$ .

La magnitud o módulo de la fuerza Coulombiana,  $|\vec{F}_{21}| = F_{21}$  viene dado por

$$F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.2)$$

donde  $r \equiv |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$  es la distancia entre las cargas. Es interesante destacar que la fuerza Coulombiana tiene alcance hasta el infinito. La magnitud  $F_{21}$  de esta fuerza es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las cargas.

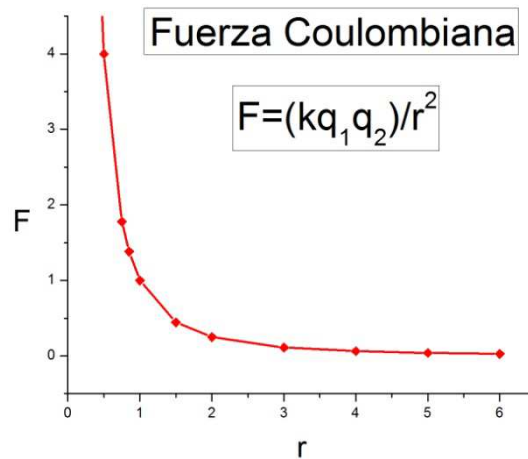


Figura 1.2 Módulo de la fuerza Coulombiana.

La línea de acción de la fuerza está contenida en la recta que une las dos partículas cargadas, y la fuerza es atractiva si ambas cargas son de signo opuesto y es repulsiva si los signos de las cargas son iguales. Enfatizamos que esta relación experimental es válida sólo para *dos cargas puntuales* o *partículas cargadas en reposo relativo*, esto implica que la ley de Coulomb debe ser modificada cuando se trata de estudiar la fuerza ejercida entre cargas puntuales y cargas distribuidas sobre cuerpos macroscópicos, o entre cuerpos macroscópicos cargados, o entre cargas en movimiento relativo. Si las cargas puntuales están en movimiento, la ley de Coulomb no es suficiente para caracterizar la fuerza total

sobre las cargas. *Experimentalmente* se ha demostrado que la fuerza de Lorentz,  $\vec{F}_L$ , que actúa sobre una partícula cargada, *en presencia de campos eléctricos externos  $\vec{E}$  y campos magnéticos externos  $\vec{B}$ , cualquiera sea el número de cargas existentes en su vecindad o la forma en que se desplazan*, depende únicamente de la posición de la partícula cargada, de su velocidad,  $\vec{v}$ , y de su carga  $q$ , en la forma:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.3)$$

Esta expresión define a la llamada Fuerza de Lorentz, y los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  definen los campos eléctricos y magnéticos que actúan sobre la carga  $q$ . Los campos vectoriales  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son, en general, funciones de la posición y del tiempo, es decir,  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(\vec{r}, t)$ .

### 3.- Principio de Superposición

Cada campo vectorial,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , cumple con el llamado *Principio de Superposición*, es decir, si un conjunto de cargas produce un campo eléctrico  $\vec{E}_1$  en el punto  $P$ , y otro conjunto de cargas produce otro campo  $\vec{E}_2$  en el mismo punto  $P$ , entonces, el campo eléctrico vectorial resultante  $\vec{E}_R$  en dicho punto viene dado por la suma vectorial de los campos:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (1.4)$$

Naturalmente, el mismo Principio de Superposición es válido para el campo vectorial magnético:

$$\vec{B}_R = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (1.5)$$

Vemos así que lo importante para describir la fuerza que actúa sobre una partícula cargada son los campos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Debemos enfatizar que el Principio de Superposición se cumple en el electromagnetismo, porque las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de los campos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , son ecuaciones diferenciales lineales. Si las ecuaciones diferenciales no son lineales, no se cumple el Principio de Superposición.

### 2.2.1 Unidad I: Electroestática

#### 4.- Teorema de Fuentes y Sumideros

Enunciado: *Todo campo vectorial  $\vec{A}$  (por ejemplo el campo  $\vec{E}(\vec{r},t)$  o el campo  $\vec{B}(\vec{r},t)$ ) queda unívocamente determinado en cada punto del espacio, conociendo la divergencia  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$  y el rotor  $(\vec{\nabla} \times \vec{A})$  del campo  $\vec{A}$ , siempre y cuando no existan fuentes ni sumideros en el infinito.*

En el caso de la teoría electromagnética que necesita la descripción de dos campos distintos, se necesita conocer la divergencia y el rotor de ambos campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , simultáneamente:

$$\text{Divergencia} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$\text{Rotor} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

En coordenadas cartesianas, el operador diferencial divergencia  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ , y el operador diferencial rotor  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ , vienen dados en la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.6)$$

que se puede escribir como un producto punto entre el operador vectorial  $\vec{\nabla}$  y el vector  $\vec{A}$ ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z) \quad (1.7)$$

donde el operador vectorial *Nabla* ( $\vec{\nabla}$ ) viene dado por

$$\vec{\nabla} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.8)$$

Usando esta notación, el rotor  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  se puede escribir formalmente en términos de un determinante, en la forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Cuando se aplica el teorema de fuentes y sumideros a los campos eléctrico  $\vec{E}(\vec{r},t)$  y magnético  $\vec{B}(\vec{r},t)$ , se ve la necesidad de conocer en cada punto del espacio la divergencia



y el rotor de cada campo vectorial. La expresión de la divergencia y el rotor de cada campo constituye un conjunto de cuatro ecuaciones que se denominan *Ecuaciones de Maxwell*, y que *experimentalmente* vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.10}$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, para las cuales se cumple el Principio de Superposición, constituye una notable generalización experimental. En estas ecuaciones,  $\vec{J}$  es la densidad de corriente eléctrica por unidad de área, y  $\rho$  es la densidad de carga por unidad de volumen. Nótese que los campos eléctrico y magnético están *indisolublemente* unidos a través de las ecuaciones diferenciales (1.10) y dan origen al llamado *campo electromagnético*. Todo el electromagnetismo está descrito por las ecuaciones de Maxwell (1.10), junto con la fuerza de Lorentz  $\vec{F}_L$

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\tag{1.11}$$

y con la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.\tag{1.12}$$

Las ecs. de Maxwell (1.10) se simplifican notablemente si los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  no dependen explícitamente del tiempo, es decir, si se cumple que

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}\tag{1.13}$$

Esta situación se produce físicamente cuando todas las cargas están en reposo en el espacio, o si se mueven lo hacen con flujo estacionario, de modo que tanto  $\rho$  como  $\vec{J}$  son constantes en el tiempo. Cuando estas condiciones se cumplen, las ecuaciones de Maxwell (1.10) se reducen al siguiente conjunto de ecuaciones no acopladas o independientes:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}\end{aligned}\tag{1.14}$$

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

En ese caso, las ecuaciones para el campo eléctrico  $\vec{E}$  describen el comportamiento de la electrostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (1.15)$$

Por su parte, las ecuaciones para el campo magnético  $\vec{B}$  describen el comportamiento de magnetostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.16)$$

Además, siguen siendo válidas las relaciones (1.11) y (1.12) correspondientes a la fuerza de Lorentz y a la segunda ley de Newton, respectivamente.

Consideremos nuevamente la ley de Coulomb (1.1), la cual es válida, como antes dijimos, para dos cargas puntuales fijas en el espacio. Esta es justamente la situación correspondiente a la electrostática que se desprende de las ecs. de Maxwell (1.10) y del caso particular (1.15).

## 5.- Campo Eléctrico

En la vecindad de toda distribución de cargas se produce una modificación de las propiedades eléctricas del medio que rodea a dicha distribución. Este cambio en las propiedades del medio puede ser medido a través del llamado Campo Eléctrico  $\vec{E}$ , el cual se define a partir de la ley de Coulomb para una carga puntual  $q'$  que crea el campo, y para una carga muy pequeña y positiva  $q_0$ , llamada *carga de prueba*. La carga de prueba debe ser muy pequeña de modo que en el límite tienda a cero:  $\lim(q_0 \rightarrow 0)$ . Este límite no se puede realizar experimentalmente, ya que la carga eléctrica está cuantizada y la *carga libre* más pequeña que existe en la naturaleza es la carga del electrón:  $e = 1.60217733 \times 10^{-19} [C]$ , por lo tanto se debe tener cuidado en la aplicación de este límite.

De acuerdo a la ley de Coulomb (1.1), la fuerza eléctrica entre las cargas  $q'$  y la carga de prueba  $q_0$ , viene dada por

$$\vec{F} = kq_0 q' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.17)$$

Dividiendo por el valor de la carga de prueba  $q_0$ , se obtiene una magnitud física que mide una propiedad del espacio que rodea a la carga  $q'$  (ver Fig. 1.3). Esta magnitud física se denomina Campo Eléctrico  $\vec{E}$  y se define como

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = kq' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.18)$$

El módulo  $E = |\vec{E}|$  del campo eléctrico viene dado por

$$E = \frac{kq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (1.19)$$

y su valor es proporcional a la carga  $q'$  que crea el campo y disminuye como el inverso cuadrático de la distancia de separación entre la carga  $q'$  y el punto  $P$  de observación.

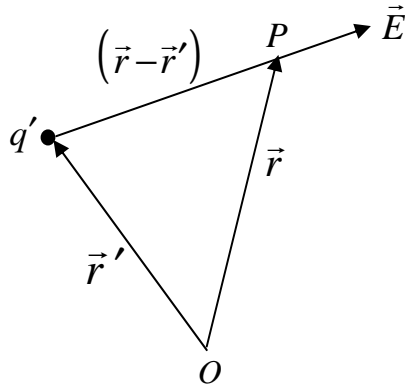


Figura 1.3 Campo eléctrico  $\vec{E}$  creado por la carga  $q'$ .

Si movemos el origen del sistema de referencia  $O$  justo a la posición de la carga puntual  $q'$  que crea el campo eléctrico, entonces  $\vec{r}' = 0$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto  $P$  de vector posición  $\vec{r}$  se escribe simplemente

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{e}_r, \quad \text{con} \quad \hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.20)$$

#### 6.- Campo eléctrico creado por un conjunto discreto de cargas.

Estudiemos ahora el campo eléctrico resultante  $\vec{E}$  en un punto fijo  $P$  del espacio, creado por un conjunto discreto de  $N$  cargas puntuales  $q'_j$ . Cada carga  $q'_j$  crea su propio campo  $\vec{E}_j$  en el punto fijo  $P$ , como se muestra en la Fig. 1.4.

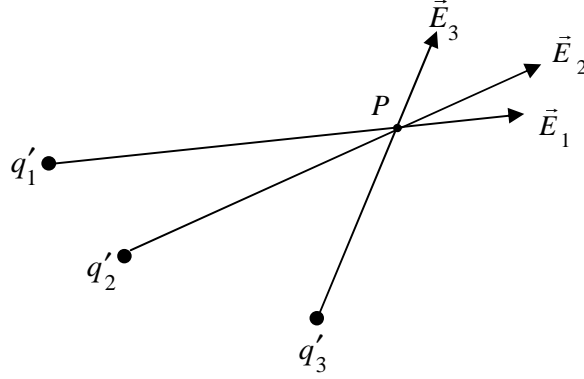


Figura 1.4 Campo eléctrico  $\vec{E}_j$  creado por cada carga  $q'_j$ .

A su vez, cada carga  $q'_j$  tiene un vector posición  $\vec{r}'_j$  respecto del origen  $O$  del sistema de referencia y el punto  $P$  tiene un único vector posición  $\vec{r}$  respecto de  $O$ . El campo eléctrico  $\vec{E}_j$  creado por cada carga individualmente viene dado por la expresión (1.18) aplicada a cada carga  $q'_j$ ,

$$\vec{E}_j = kq_j \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3} \quad (1.21)$$

De acuerdo al Principio de Superposición, el campo resultante  $\vec{E}$  en el punto  $P$  viene dado por la suma vectorial de los campos individuales,

$$\vec{E} = \sum_j \vec{E}_j \quad (1.22)$$

Usando (1.21), escribimos,

$$\vec{E} = \sum_j kq_j \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3} \quad (1.23)$$

#### 7.- Campo eléctrico creado por una distribución continua de cargas.

En el caso de una distribución continua de carga, la carga puede estar distribuida en un objeto unidimensional  $l'$ , o en una superficie  $S'$ , o en un volumen  $V'$ . En cada caso podemos definir una función llamada *densidad de carga* que determina la forma en la cual está distribuida la carga sobre una línea ( $\lambda$  densidad lineal de carga), sobre una superficie ( $\sigma$  densidad superficial de carga) o sobre un volumen ( $\rho$  densidad volumétrica de carga).

La definición de la densidad de carga viene dada en función de magnitudes infinitesimales de carga  $dq'$  y de la correspondiente dimensión infinitesimal:

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{r}') &\equiv \left( \frac{dq'}{dl'} \right), & \text{densidad lineal de carga} \\ \sigma(\vec{r}') &\equiv \left( \frac{dq'}{dS'} \right), & \text{densidad superficial de carga} \\ \rho(\vec{r}') &\equiv \left( \frac{dq'}{dV'} \right), & \text{densidad volumétrica de carga}\end{aligned}\tag{1.24}$$

El valor de la densidad de carga depende de la posición del diferencial de carga  $dq'$  que crea el campo diferencial  $d\vec{E}$ . Nótese que usamos magnitudes con primas para indicar la carga que crea el campo eléctrico y la dimensión de la región que contiene la carga que crea el campo  $d\vec{E}$ .

Consideremos una distribución volumétrica de carga, tal como indica la Fig. 1.5. Dado que un elemento diferencial de carga  $dq'$  es muy pequeño, podemos considerarlo como una carga puntual, y por lo tanto, vale la ley de Coulomb. El campo eléctrico diferencial  $d\vec{E}$  producido en la posición  $\vec{r}$  (punto  $P$ ) por elemento diferencial de carga  $dq'$  (*equivalente a la carga puntual*) situada en la posición  $\vec{r}'$  viene dado por:

$$d\vec{E} \equiv k dq' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\tag{1.25}$$

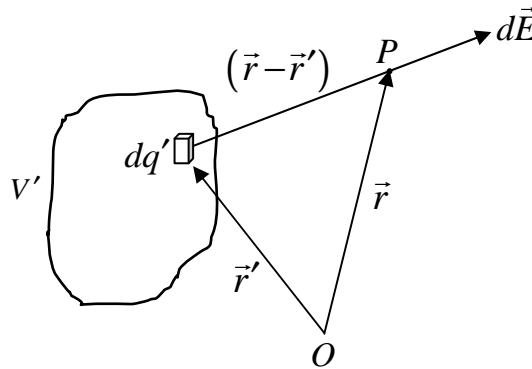


Fig. 1.5 Campo eléctrico diferencial  $d\vec{E}$  debido a una distribución continua de carga.

De acuerdo a la relación (1.24), se tiene que  $dq' = \rho(\vec{r}') dV'$ , luego el campo eléctrico

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

diferencial  $d\vec{E}$  creado por una distribución volumétrica de carga, viene dado por

$$d\vec{E} \equiv k \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (1.26)$$

La aplicación del Principio de Superposición nos permite encontrar el campo eléctrico  $\vec{E}$  total producido por la distribución volumétrica (continua) de carga. Para ello debemos realizar una suma sobre todos los infinitos elementos diferenciales en los que está subdividido el volumen  $V'$ , cada uno de los cuales contiene un elemento diferencial de carga  $dq' = \rho(\vec{r}') dV'$ . La suma sobre todos los campos diferenciales  $d\vec{E}$  nos entrega el campo resultante, el cual se obtiene a través de la integral

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

reemplazando  $d\vec{E}$  de la relación (1.26), se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} k \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (1.27)$$

Nótese que la integral se realiza sobre las variables con prima ( $\vec{r}'$  y  $V'$ ), es decir, sobre las variables que determinan la posición de la carga  $dq'$  que crea el campo. En consecuencia, el campo resultante  $\vec{E}(\vec{r})$  sólo depende de la posición del punto  $P$  donde se observa el campo resultante  $\vec{E}(\vec{r})$ , es decir, sólo depende del vector posición  $\vec{r}$ .

Si la carga está distribuida en forma superficial, de modo que la diferencial de carga se expresa como  $dq' = \sigma dS'$ , el campo eléctrico viene dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{S'} k \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' \quad (1.28)$$

Si la carga está distribuida en forma unidimensional, de modo que el elemento diferencial de carga se expresa como  $dq' = \lambda dl'$ , el campo eléctrico viene dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{l'} k \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl' \quad (1.29)$$

En consecuencia, para cualquier distribución continua de carga, el campo eléctrico resultante  $\vec{E}(\vec{r})$  se puede calcular usando cualquiera de las definiciones de la (1.27) a la (1.29), según cómo sea el tipo de distribución de cargas.

## 8.- Diferencia de Potencial Electrostático

La diferencia de Potencial Electrostático,  $\Delta V_{ab} \equiv V(b) - V(a)$ , se define como el trabajo por unidad de carga realizado por un agente externo que debe transportar la carga de prueba ( $q_0 \rightarrow 0^+$ ), con velocidad constante (en equilibrio), desde el punto  $a$  al punto  $b$ , en presencia del campo eléctrico  $\vec{E}$ :

$$\Delta V_{ab} \equiv V(b) - V(a) = \frac{W_{ab(\text{agente})}}{q_0} = \frac{1}{q_0} \int_a^b \vec{F}_{\text{agente}} \cdot d\vec{l} \quad (1.30)$$

Dado que la carga se encuentra en equilibrio en todo momento mientras se mueve desde  $a$  hasta  $b$ , entonces se cumple que  $\vec{F}_{\text{agente}} + \vec{F}_{\text{campo}} = 0$ , es decir,  $\vec{F}_{\text{agente}} = -\vec{F}_{\text{campo}}$ . Reemplazando en la definición de la diferencia de potencial (1.30), se tiene

$$\Delta V_{ab} \equiv V(b) - V(a) = \int_a^b \left( \frac{-\vec{F}_{\text{campo}}}{q_0} \right) \cdot d\vec{l} \quad (1.31)$$

pero  $\left( \frac{\vec{F}_{\text{campo}}}{q_0} \right)$  es justamente el campo eléctrico  $\vec{E}$  producido por la configuración de cargas a la cual le estamos midiendo la diferencia de potencial, es decir,  $\vec{E} = \left( \frac{\vec{F}_{\text{campo}}}{q_0} \right)$ .

Entonces podemos expresar el concepto de diferencia de potencial en función del campo eléctrico  $\vec{E}$ , en la forma

$$\Delta V_{ab} \equiv V(b) - V(a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.32)$$

Si el punto  $a = \text{ref}$  lo usamos como una referencia, y *hacemos arbitrariamente igual a cero el potencial en dicho punto*,  $V(a = \text{ref}) = 0$ , entonces, *por abuso de lenguaje*, podemos hablar del potencial  $V(b)$  en el punto  $b$

$$\Delta V_{ab} \equiv V(b) - 0 = - \int_{\text{ref}}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.33)$$

$$V(b) = - \int_{a=\text{ref}}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.34)$$

Sin embargo, debe quedar claro que siempre estamos hablando de una diferencia de potencial que es lo que verdaderamente tiene sentido en física. Muchas veces esta relación se escribe en la forma

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

$$V(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.35)$$

En este punto es muy importante darse cuenta que las integrales que aparecen en las relaciones de la (1.30) a la (1.35), *no pueden depender de la trayectoria seguida para ir desde el punto  $a$  al punto  $b$* , pues si así sucediera, el potencial electrostático en un punto  $b$  no tendría un valor único para una referencia fija dada  $a = ref$ , sino que su valor dependería de la trayectoria seguida entre los puntos  $a$  y  $b$ . Para que la integral sea independiente de la trayectoria, el campo vectorial  $\vec{E}$  debe ser un *campo conservativo*. Más adelante demostraremos que esta propiedad es cierta para el campo electrostático  $\vec{E}$ , pero por ahora aceptaremos que las integrales definidas entre (1.30) y (1.35), son independientes de la trayectoria y que, por lo tanto, el campo eléctrico  $\vec{E}$  es un campo vectorial conservativo.

#### 9.- Potencial electrostático creado por un conjunto discreto de cargas

Calculemos el potencial electrostático creado por una única carga puntual positiva  $q'$  ubicada en el origen de un sistema de referencia, en función de la distancia radial  $r$  a la carga que crea el campo, como se muestra en la Fig. 1.6.

Cuando nos movemos en línea recta desde el punto  $a$  hasta el punto  $b$  que está a una distancia radial  $r$  en las cercanías de la carga  $q'$  que crea el campo eléctrico, vemos que los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  son exactamente antiparalelos, tal como lo muestra la Fig. 1.6, por lo tanto, el producto punto de ellos es negativo, esto es,

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl \cos 180^\circ = -E dl \quad (1.36)$$

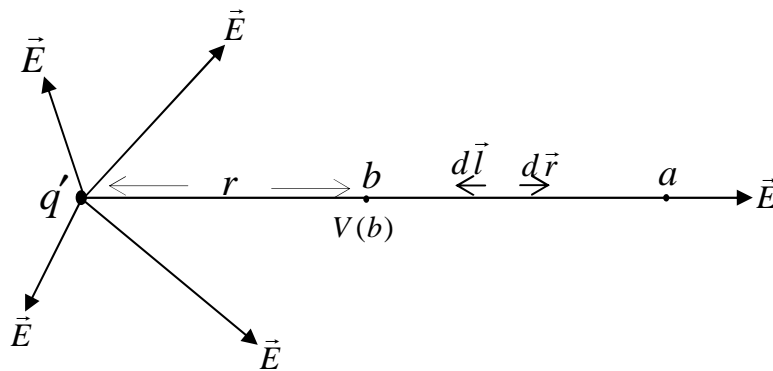


Figura 1.6 Potencial electrostático  $V(r)$  debido a una carga puntual.



La relación (1.32) queda,

$$\Delta V_{ab} \equiv V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E dl \quad (1.37)$$

Los diferenciales  $dl$  y  $dr$  tienen sentidos de crecimiento distinto sobre la recta que va desde  $a$  hasta  $b$ , como se muestra en la Fig. 1.6, es decir,  $dl = -dr$ , y además el módulo del campo eléctrico de una carga puntual  $q'$  viene dado por  $E = \frac{kq'}{r^2}$ , por lo tanto,  $\Delta V_{ab}$  queda,

$$\Delta V_{ab} \equiv V(b) - V(a) = -\int_a^b \frac{kq'}{r^2} dr = -kq' \int_a^b \frac{dr}{r^2} \quad (1.38)$$

$$\Delta V_{ab} \equiv V(b) - V(a) = -kq' \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b \quad (1.39)$$

En consecuencia,  $\Delta V_{ab}$  en las cercanías de una carga puntual  $q'$ , viene dada por:

$$\Delta V_{ab} \equiv V(b) - V(a) = kq' \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad (1.40)$$

Si ahora hacemos tender  $a \rightarrow \infty$ , en el límite  $\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a} \right) = 0$ , y por lo tanto el potencial en  $a$  vale cero, es decir,  $V(a) = 0$ . Entonces, el potencial en las cercanías de una carga puntual  $q'$  vale

$$V(b) = \frac{kq'}{b} \quad (1.41)$$

Dado que el punto  $b$  está a una distancia radial  $r = b$  de la carga  $q'$ , el potencial en el punto  $b = r$  viene dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{kq'}{|\vec{r}|} \quad (1.42)$$

Esta expresión define el potencial en un punto en las cercanías de una carga puntual  $q'$  en reposo, pero, al mismo tiempo debemos recordar que estamos hablando de una diferencia de potencial entre un punto de referencia donde el potencial vale cero (el infinito en este caso) y un punto a una distancia  $r$  de la carga que crea el campo.

Si ponemos el origen  $O$  fuera de la carga puntual  $q'$  que crea el campo eléctrico, entonces usando (1.42), el potencial  $V(\vec{r})$  creado por la carga puntual se puede escribir en la forma

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

$$V(\vec{r}) = \frac{kq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.43)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector posición que va del origen del sistema de referencia  $O$  al punto  $P$  donde se quiere medir el potencial y donde  $\vec{r}'$  es el vector posición que va del origen del sistema de referencia  $O$  al punto donde está ubicada la carga  $q'$ .

Nótese que el potencial electrostático puede ser positivo o negativo según el signo de la carga, y que esto no es más que la indicación de que el trabajo para traer una carga de prueba desde infinito hasta una distancia  $r$  de la carga que crea el campo es positivo o negativo, respectivamente. Si  $q > 0 \rightarrow W > 0$ , es decir, se debe realizar trabajo positivo ( $\vec{F}$  apunta en la misma dirección del desplazamiento  $d\vec{l}$ ) por el agente externo para vencer las fuerzas de repulsión entre las dos cargas, y si  $q < 0 \rightarrow W < 0$ , el agente externo realiza un trabajo negativo para evitar que las cargas se aceleren una hacia la otra. Es interesante destacar que este resultado depende sólo de la coordenada radial  $r$ , y por lo tanto presenta una simetría esférica, es decir, el potencial en las cercanías de la carga puntual es independiente de los ángulos esféricos  $\theta$  y  $\phi$ . Esto significa que el potencial electrostático es el mismo en cualquier punto de una superficie esférica de radio  $r$ . Las regiones de potencial constante se denominan *regiones equipotenciales* y se definen como aquellas líneas, superficies o volúmenes sobre las cuales el trabajo realizado para mover una carga a través de la región es idénticamente nulo o cero, es decir,  $W_{a \rightarrow b}(\text{equipot}) = 0$ . Para el caso de una carga puntual, *las regiones equipotenciales son superficies equipotenciales* y toman la forma de superficies esféricas concéntricas.

La condición matemática general para encontrar *la región equipotencial* viene dada por

$$W_{a \rightarrow b}(\text{equipot}) = -\int_a^b q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.44)$$

donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico y  $d\vec{l}$  es un vector tangente a la trayectoria en la región equipotencial. La condición (1.44) tiene una consecuencia muy interesante. Dado que la trayectoria  $d\vec{l}$  para ir desde  $a$  hasta  $b$  existe y es arbitraria, y dado que el campo eléctrico  $\vec{E}$  existe y es distinto de cero, sólo cabe concluir que el trabajo vale cero,  $W_{a \rightarrow b}(\text{equipot}) = 0$ , sí y sólo sí el producto punto es cero, es decir, sí  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ . Dado que  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el menor ángulo comprendido entre los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$ , la

condición  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl \cos \theta = 0$  sólo se puede cumplir si  $\cos \theta = 0$ , es decir, si  $\theta = 90^\circ$ , lo cual implica que el campo eléctrico  $\vec{E}$  y la trayectoria  $d\vec{l}$  en la región equipotencial son siempre mutuamente perpendiculares. En el caso de las equipotenciales de una carga puntual en reposo, la región equipotencial está definida por superficies equipotenciales de forma esférica.

Ya conocemos el potencial creado por una única carga puntual. Veamos ahora cómo calcular el potencial electrostático creado por muchas cargas puntuales. Consideremos un conjunto de  $N$  cargas puntuales fijas en el espacio. Sean  $\vec{r}_j$  los vectores posición de cada carga  $q_j$  con respecto al origen  $O$  del sistema de referencia. Podemos calcular el potencial  $V(\vec{r})$  en un punto  $P$  de vector posición  $\vec{r}$  respecto al mismo origen  $O$  usando el Principio de Superposición de los campos eléctricos. El campo eléctrico resultante de la superposición  $\vec{E}_R$ , viene dado por  $\vec{E}_R = \sum_j^N \vec{E}_j$ , por lo tanto, usando la relación (1.34), con  $a = \infty$  y  $b = r$ , tenemos

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{E}_R \cdot d\vec{l} \quad (1.45)$$

Insertando el campo resultante  $\vec{E}_R$ , se tiene

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{E}_R \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^r \left( \sum_j^N \vec{E}_j \right) \cdot d\vec{l} \quad (1.46)$$

La sumatoria y la integral se pueden intarcambiar porque son operadores lineales,

$$V(\vec{r}) = \sum_j^N \left\{ - \int_{\infty}^r \vec{E}_j \cdot d\vec{l} \right\} \quad (1.47)$$

La integral negativa dentro del paréntesis define al potencial  $V_j(\vec{r})$  creado por cada carga puntual  $q_j$  en el punto  $P$ , es decir,

$$V_j(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{E}_j \cdot d\vec{l} \quad (1.48)$$

reemplazando esta expresión en la relación (1.47), se tiene

$$V(\vec{r}) = \sum_j^N V_j(r) \quad (1.49)$$

En consecuencia, el potencial resultante  $V(\vec{r})$  en las inmediaciones de una distribución discreta de cargas, es la suma de los potenciales individuales creados por cada una de las

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

cargas puntuales en reposo relativo. Esto significa que el Principio de Superposición se cumple también para los potenciales electrostáticos. Sabemos por la relación (1.43) que el potencial electrostático en las inmediaciones de una carga puntual  $q_j$  viene dado por

$$V_j(\vec{r}) = \frac{kq_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}. \text{ Reemplazando esta expresión en la relación (1.49), obtenemos el potencial}$$

producido por el conjunto de  $N$  cargas

$$V(\vec{r}) = \sum_j^N \left( \frac{kq_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) \quad (1.50)$$

#### 10.- Potencial electrostático creado por una distribución continua de carga

Consideremos una distribución continua de carga distribuida en un volumen  $V'$  como se muestra en la Fig. 1.7. Estudiaremos el potencial diferencial  $dV(\vec{r})$  creado por un elemento diferencial de carga  $dq'$ , que puede ser considerado como una carga puntual, y por lo tanto, vale la ley de Coulomb.

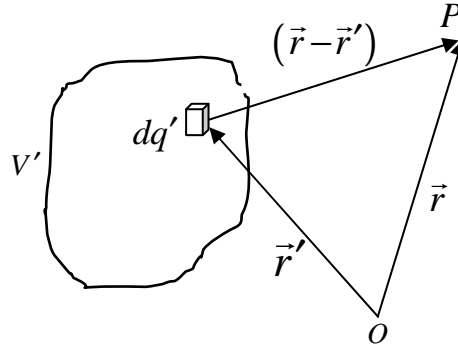


Fig. 1.7 Potencial  $dV$  en el punto  $P$  creado por un elemento diferencial de carga  $dq'$ .

Un elemento diferencial de carga  $dq'$  ubicado en la posición  $\vec{r}'$  genera un potencial diferencial  $dV$  de acuerdo a la relación (1.43), en la forma,  $dV(\vec{r}) = \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ . En este caso, el elemento diferencial de carga viene dada por  $dq' = \rho(\vec{r}') dV'$ . Entonces, el potencial

diferencial  $dV$  en un punto  $P$ , exterior a la distribución volumétrica de carga ubicado en la posición  $\vec{r}$  viene dado por:

$$dV(\vec{r}) = \frac{k\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.51)$$

Dado que también se cumple el Principio de Superposición para los potenciales, de acuerdo a la relación mostrada en (1.49), podemos calcular el potencial resultante debido a la distribución volumétrica de carga  $\rho(\vec{r}')$  usando el proceso de integración sobre todo el volumen  $V'$  que contiene a la distribución de cargas que crea el potencial electrostático, es decir,

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.52)$$

Nótese que la integración se realiza sólo sobre las coordenadas con primas, es decir, sobre las coordenadas que describen la posición de la carga que genera el potencial electrostático. Por lo tanto, el potencial resultante  $V(\vec{r})$  es una magnitud escalar que depende sólo del vector posición  $\vec{r}$  del punto  $P$  donde medimos el potencial.

Si se tiene una distribución superficial de carga,  $\sigma(\vec{r}') = \left(\frac{dq'}{dS'}\right)$  el potencial viene dado por

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k\sigma(\vec{r}')dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.53)$$

y si tenemos una distribución lineal de carga,  $\lambda(\vec{r}') = \left(\frac{dq'}{dl'}\right)$ , el potencial se escribe:

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k\lambda(\vec{r}')dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.54)$$

En resumen, ya sabemos como calcular  $V(\vec{r})$  conociendo el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  a través de la expresión general dada por (1.35):  $V(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . La pregunta es ¿cómo podemos calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$  si conocemos el potencial  $V(r)$ ?. Escribamos esta relación en forma diferencial

$$dV(\vec{r}) = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.55)$$

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

Escribamos ahora  $dV(\vec{r}) = dV(x, y, z)$  usando derivadas parciales en coordenadas cartesianas:

$$dV(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (1.56)$$

y escribamos el vector desplazamiento en la forma general

$$d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (1.57)$$

Entonces el producto punto vectorial  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  se expresa como

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \quad (1.58)$$

realizando el producto, se obtiene

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (1.59)$$

Reemplazando (1.56) y (1.59) en la relación (1.55), obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (1.60)$$

Igualando los coeficientes de los diferenciales, se deduce que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.61)$$

En consecuencia, el vector campo eléctrico se escribe

$$\vec{E} = (E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \quad (1.62)$$

la última expresión de la derecha no es más que el gradiente  $\vec{\nabla}V(\vec{r})$  de la función potencial  $V(\vec{r})$ , luego

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \quad (1.63)$$

Hemos llegado así a la importante conclusión de que el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  puede ser calculado de dos formas diferentes:

- a) directamente a través de su definición a partir de la ley de Coulomb (1.27), y
- b) a través de la expresión (1.63), calculando primero el potencial electrostático  $V(\vec{r})$ .

Este último método presenta ventajas comparativas en términos de su cálculo, ya que se trata de una magnitud escalar en comparación al cálculo directo del vector  $\vec{E}(\vec{r})$  que involucra tres integrales.

Usando la relación (1.63), podemos obtener una interesante propiedad del campo eléctrico estático  $\vec{E}(\vec{r})$ . Tomemos el rotor del campo eléctrico dado por (1.63)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V(r) \quad (1.64)$$

Consideremos conocida la siguiente la identidad vectorial  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = \vec{0}$ ,  $\forall \Phi$ , donde  $\Phi$  es cualquier función escalar, entonces,  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V(\vec{r}) = \vec{0}$ , ya que  $V(\vec{r})$  es una función escalar. Usando este resultado vemos que se cumple que el rotor del campo electrostático vale cero,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (1.65)$$

Como veremos a continuación, esta es la condición para que el campo eléctrico sea un campo conservativo. Por otra parte,  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$  es una de las ecuaciones de la electrostática que queríamos demostrar.

El teorema de Stokes para cualquier campo vectorial  $\vec{E}$  establece que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{sup}} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (1.66)$$

donde  $\Gamma$  es una curva general que limita a la superficie arbitraria  $S$ . Dado que según la relación (1.65) se cumple que  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ , entonces de (1.66) se tiene

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{sup}} \vec{0} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.67)$$

Si la integral sobre la trayectoria cerrada vale cero,  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , eso implica que la integral

$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$  es independiente de la trayectoria seguida entre los puntos  $a$  y  $b$ . Es decir, se cumple que

$$(I) \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = (II) \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.68)$$

donde los símbolos  $(I)$  y  $(II)$  indican trayectorias distintas. Por lo tanto el campo eléctrico estático es un campo conservativo, y se cumple que la integral  $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$  tiene el mismo valor para cualquier trayectoria que conecte los puntos  $a$  y  $b$ . De este modo, podemos asegurar que la diferencia de potencial electrostático  $\Delta V_{ab}$  está bien definida y tiene un valor único entre dos puntos  $a$  y  $b$  dados,

$$\Delta V_{ab} = V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.69)$$

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

Dado que ya conocemos el rotor del campo eléctrico estático,  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ , ahora necesitamos conocer la divergencia del campo estático,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ , es decir, debemos demostrar que se cumple la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad (1.70)$$

Para encontrar esta ecuación, consideremos el estudio del flujo del campo eléctrico  $\Phi_{\vec{E}}$  a través de una superficie cerrada. El flujo  $\Phi$  de un campo vectorial cualquiera, por ejemplo el campo eléctrico  $\vec{E}$ , a través de una superficie abierta se define de la siguiente manera:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.71)$$

donde  $d\vec{S}$  es la diferencial de superficie. Si la superficie es cerrada el flujo cerrado se representa por

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.72)$$

El teorema de Gauss establece la siguiente relación para *el flujo cerrado* de un campo vectorial:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad (1.73)$$

donde  $V$  es el volumen encerrado por la superficie  $S$ . Este teorema es un teorema matemático de validez general, ya que el campo vectorial  $\vec{E}$  que aparece en el teorema es cualquier campo vectorial. La aplicación de este teorema al caso electromagnético da origen a una de las ecuaciones de Maxwell denominada Ley de Gauss. En el próximo capítulo obtendremos la ecuación (1.70).

### 11.- Conductores y aisladores

De acuerdo a su comportamiento eléctrico, los materiales se pueden dividir en conductores, semiconductores y aisladores. Podemos describir varias subdivisiones más, pero para efectos de estos apuntes, basta con los tres ya nombrados.

*Los conductores* son materiales que poseen un gran número de cargas eléctricas libres. Un ejemplo típico de esta clase de materiales la constituyen los metales, en los cuales las cargas libres son los electrones y pueden moverse sin restricciones por todo el metal. Al aplicar un campo eléctrico a un metal, por más pequeño que sea el campo, se ejerce una



fuerza eléctrica sobre cada carga y se produce un desplazamiento de las cargas, que se mantiene hasta que cesa la acción externa del campo eléctrico. Si el campo eléctrico externo se mantiene en el tiempo, por ejemplo a través de un dispositivo para realizar trabajo sobre las cargas (por ejemplo, una Fuente de fuerza electromotriz (Fem)), se produce una corriente eléctrica en el metal. Es justamente esta propiedad de permitir el flujo de la corriente eléctrica lo que caracteriza a los metales o conductores.

Adicionalmente, cualquier carga libre que se ponga en el interior del conductor descargado se mueve, por efecto de campos eléctricos estáticos, hasta que la fuerza neta sobre cada carga es cero. Independientemente de si el conductor tiene o no agujeros en su interior, *las cargas libres quedan en equilibrio sólo en la superficie exterior del conductor*. Debido a esta propiedad, el campo eléctrico estático al interior de un conductor es siempre cero, es decir,  $\vec{E}_{\text{interior}} = \vec{0}$ . Sin embargo, el campo eléctrico al interior de un conductor o metal es distinto de cero,  $\vec{E}_{\text{interior}} \neq \vec{0}$ , si existe un flujo neto cargas que se ingresan al metal por algún dispositivo capaz de realizar trabajo sobre las cargas. Estos dispositivos son las Fuentes de Fuerza electromotriz (Fem) que crean campos no-conservativos que estudiaremos más adelante. En ese caso ya no hablamos de electrostática, sino de electrodinámica.

Por oposición, existen materiales que no poseen cargas libres de moverse por todo el material, sino que los electrones están ligados a sus moléculas. Estos materiales se denominan *aisladores o dieléctricos*. Para los dieléctricos, la presencia de un campo eléctrico externo sólo puede producir una deformación local de las moléculas y el material se polariza, es decir, se produce una separación local de las cargas positivas de las negativas, de modo tal que a un lado del material existe una pequeña cantidad de carga de un signo, y en el extremo opuesto existe una pequeña cantidad de carga del otro signo, tal como se muestra en la Fig. 1.8.

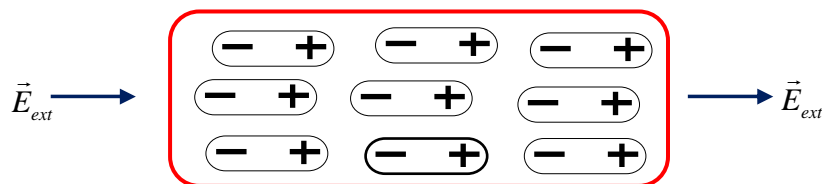


Figura 1.8 Material dieléctrico polarizado por un campo eléctrico externo.

### 2.2.1 Unidad I: Electrostática

Los materiales que tienen un comportamiento eléctrico intermedio entre conductores y aisladores se denominan semiconductores.

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

En esta parte del Dossier hacemos la aplicación de los conceptos, métodos y leyes que rigen la electrostática. Se utiliza una gran variedad de situaciones problemáticas y se usan variados métodos para su solución.

1.- Se tiene un sistema de cargas puntuales  $q_1$ ,  $-q_2$ ,  $q_3$  y  $-q_4$  ubicadas en las posiciones  $(-x_1, +y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, -y_3)$  y  $(-x_4, -y_4)$  respectivamente. Determinar la fuerza electrostática resultante sobre una carga  $Q$  puesta en el origen del sistema de referencia, como lo muestra la Fig. 1.1.

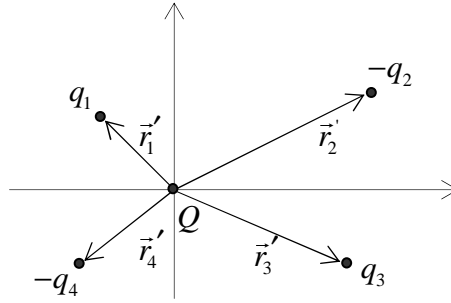


Figura 1.1 Fuerza eléctrica resultante sobre la carga  $Q$ , creada por una distribución discreta de cargas.

Se aplica la Ley de Coulomb  $\vec{F}_{jQ} = \frac{kq_j Q(\vec{r} - \vec{r}_j')}{|\vec{r} - \vec{r}_j'|^3}$  para cada pareja de cargas puntuales,

donde el índice  $j$  indica la carga correspondiente. A continuación escribiremos los vectores para cada carga y la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga  $Q$ .

$$\vec{r} = 0 \quad \vec{r}_1' = -x_1\hat{i} + y_1\hat{j} \quad ; \quad \vec{r} - \vec{r}_1' = x_1\hat{i} - y_1\hat{j} \quad ; \quad |\vec{r} - \vec{r}_1'| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (1)$$

$$\vec{F}_{1Q} = \frac{kq_1 Q(x_1\hat{i} - y_1\hat{j})}{(x_1^2 + y_1^2)^{3/2}} \quad (2)$$

$$\vec{r} = 0 \quad \vec{r}_2' = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} \quad ; \quad \vec{r} - \vec{r}_2' = -x_2\hat{i} - y_2\hat{j} \quad ; \quad |\vec{r} - \vec{r}_2'| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \quad (3)$$

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

$$\vec{F}_{2Q} = \frac{-k|q_2|Q(-x_2\hat{i} - y_2\hat{j})}{(x_2^2 + y_2^2)^{3/2}} \quad (4)$$

$$\vec{r} = 0 \quad \vec{r}'_3 = x_3\hat{i} - y_3\hat{j} \quad ; \quad \vec{r} - \vec{r}'_3 = -x_3\hat{i} + y_3\hat{j} \quad ; \quad |\vec{r} - \vec{r}'_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} \quad (5)$$

$$\vec{F}_{3Q} = \frac{kq_3Q(-x_3\hat{i} + y_3\hat{j})}{(x_3^2 + y_3^2)^{3/2}} \quad (6)$$

$$\vec{r} = 0 \quad \vec{r}'_4 = -x_4\hat{i} - y_4\hat{j} \quad ; \quad \vec{r} - \vec{r}'_4 = x_4\hat{i} + y_4\hat{j} \quad ; \quad |\vec{r} - \vec{r}'_4| = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} \quad (7)$$

$$\vec{F}_{4Q} = \frac{-k|q_4|Q(x_4\hat{i} + y_4\hat{j})}{(x_4^2 + y_4^2)^{3/2}} \quad (8)$$

Luego, usando el Principio de Superposición, la fuerza resultante sobre la carga  $Q$ , debido a la presencia de las cargas  $q_1$ ,  $-q_2$ ,  $q_3$  y  $-q_4$ , viene dada por

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{1Q} + \vec{F}_{2Q} + \vec{F}_{3Q} + \vec{F}_{4Q} \quad (9)$$

reemplazando las fuerzas recién calculadas, se obtiene la fuerza resultante  $\vec{F}_R$  sobre  $Q$

$$\vec{F}_R = kQ \left( \frac{q_1(x_1\hat{i} - y_1\hat{j})}{(x_1^2 + y_1^2)^{3/2}} - \frac{|q_2|(-x_2\hat{i} - y_2\hat{j})}{(x_2^2 + y_2^2)^{3/2}} + \frac{q_3(-x_3\hat{i} + y_3\hat{j})}{(x_3^2 + y_3^2)^{3/2}} - \frac{|q_4|(x_4\hat{i} + y_4\hat{j})}{(x_4^2 + y_4^2)^{3/2}} \right) \quad (10)$$

#### Equation Section (Next)

2.- Se tienen dos varillas cargadas dispuestas horizontalmente, tal como se muestra en la Fig. 2.1.

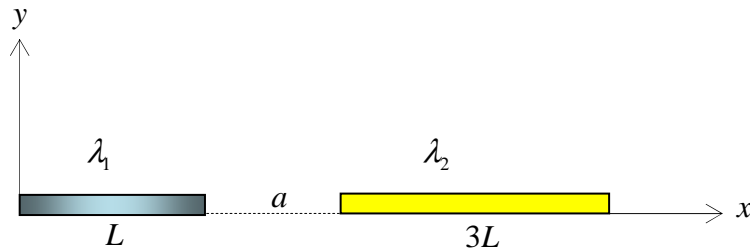


Figura 2.1 Fuerza eléctrica entre dos varillas cargadas.

La varilla de la izquierda de largo  $L$  tiene densidad lineal constante  $\lambda_1 = \lambda_0 = cte$ , y la varilla de la derecha de largo  $3L$  tiene una densidad lineal  $\lambda_2$  dada por  $\lambda_2 = \beta x$ , donde  $\beta = cte$ . Ambas varillas están separadas una distancia  $a$ .

- Calcule el campo eléctrico producido por la varilla de la izquierda a una distancia  $x > L$  sobre el eje  $x$ , es decir, justo en la región donde se encuentra la varilla de la derecha.
- Calcule la fuerza eléctrica resultante ejercida por la varilla de la izquierda sobre la varilla de la derecha.

**Solución:**

- Cálculo del campo eléctrico producido por la varilla de la izquierda a una distancia  $x > L$  sobre el eje  $x$ , es decir, justo en la región donde se encuentra la varilla de la derecha.

El campo eléctrico viene dado por  $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ . Se elige el origen del sistema de referencia en el origen del sistema  $(x, y)$ .

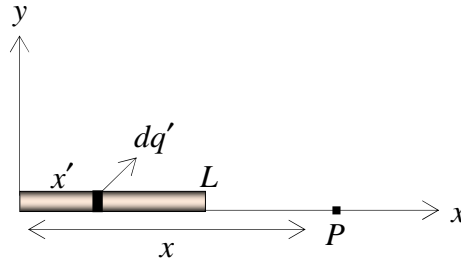


Figura 2.2 Campo eléctrico creado por la varilla de la izquierda en el punto  $P$ .

El elemento diferencial de carga viene dado por  $dq' = \lambda_0 dx'$ . Además, según la figura, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por  $\vec{r} = x\hat{i}$  y  $\vec{r}' = x'\hat{i}$ . Luego,  $(\vec{r} - \vec{r}') = (x - x')\hat{i}$ , y el campo eléctrico queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (x - x')\hat{i}}{|x - x'|^3} = \int \frac{k \lambda_0 dx' (x - x')\hat{i}}{(x - x')^3} \quad (1)$$

$$\vec{E}(x) = k \lambda_0 \int_{x'=0}^{x'=L} \frac{dx'}{(x - x')^2} \hat{i} = k \lambda_0 \hat{i} \left( \frac{1}{(x - x')} \right)_{x'=0}^{x'=L} \quad (2)$$

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

Finalmente, el campo eléctrico en la región donde está la segunda varilla viene dado por

$$\vec{E}(x) = k\lambda_0 \left( \frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) \hat{i} \quad (3)$$

b) Cálculo de la fuerza eléctrica resultante ejercida por la varilla de la izquierda sobre la varilla de la derecha.

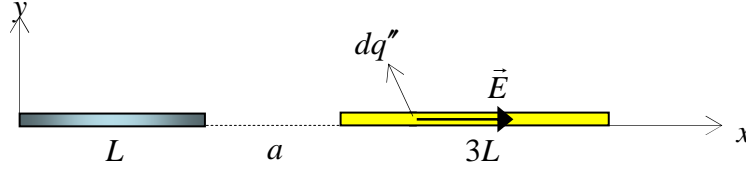


Figura 2.3 Fuerza eléctrica sobre la varilla de la derecha.

Sobre cada elemento diferencial de carga  $dq''$  de la varilla de la derecha, actúa un campo eléctrico  $\vec{E}$ , horizontal de magnitud  $E(x) = k\lambda_0 \left( \frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right)$ . Usando la densidad lineal de carga  $\lambda_2 = \beta x$  de la varilla de la derecha, podemos escribir la fuerza diferencial  $d\vec{F}$  sobre el elemento diferencial de carga  $dq''$  en la forma

$$d\vec{F} = \vec{E}dq'' = \vec{E}(\lambda_2 dx) \quad (4)$$

En módulo, se tiene  $dF = E\lambda_2 dx = E(\beta x) dx$ . Reemplazando el campo externo dado por la relación (3), creado por la varilla de la izquierda, se tiene

$$dF = k\lambda_0 \left( \frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) (\beta x) dx \quad (5)$$

La fuerza resultante sobre la varilla de la derecha viene dada por la superposición de las fuerzas individuales

$$F = \int dF = k\lambda_0\beta \left\{ \int_{x=(L+a)}^{x=(4L+a)} \frac{xdx}{x-L} - \int_{x=(L+a)}^{x=(4L+a)} \frac{xdx}{x} \right\} \quad (6)$$

$$F = k\lambda_0\beta \left\{ \left[ (x-L) + L \ln(x-L) \right]_{x=(L+a)}^{x=(4L+a)} - \left[ x \right]_{x=(L+a)}^{x=(4L+a)} \right\} \quad (7)$$

$$F = k\lambda_0\beta \left\{ 3L + L \ln \frac{(3L+a)}{a} - 3L \right\} \quad (8)$$

En consecuencia, la fuerza eléctrica ejercida por la varilla de la izquierda sobre la varilla de la derecha, vectorialmente, viene dada por

$$\vec{F} = k\lambda_0\beta L \ln \left( \frac{3L+a}{a} \right) \hat{i} \quad (9)$$

3.- a) Calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$  creado por una varilla de largo  $L$ , de densidad lineal de carga constante ( $\lambda = cte$ ) en el punto  $P(a,b)$ , donde  $a > L$ . b) Calcular el potencial electrostático en  $P(a,b)$  usando la relación  $V(\vec{r}) = \int \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

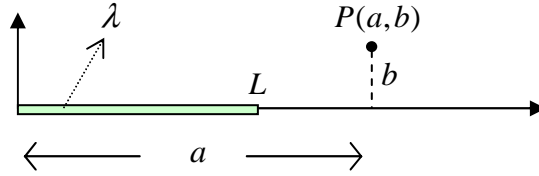


Figura 3.1 Campo eléctrico creado por una varilla de carga.

### Solución:

a) Cálculo de campo eléctrico.

De acuerdo a la Fig. 3.1, los vectores posición y las relaciones entre ellos vienen dadas por

$$\begin{aligned} \vec{r} &= a\hat{i} + b\hat{j}, \quad \vec{r}' = x\hat{i}, \\ (\vec{r} - \vec{r}') &= (a-x)\hat{i} + b\hat{j}, \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(a-x)^2 + b^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Dado que  $dq' = \lambda dx$ , el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = \int_0^L \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_0^L \frac{k (\lambda dx) ((a-x)\hat{i} + b\hat{j})}{((a-x)^2 + b^2)^{3/2}} \quad (11)$$

$$\vec{E} = k\lambda \int_0^L \frac{dx(a-x)}{((a-x)^2 + b^2)^{3/2}} \hat{i} + k\lambda b \int_0^L \frac{dx}{((a-x)^2 + b^2)^{3/2}} \hat{j} \quad (12)$$

Finalmente, el campo eléctrico vectorial, queda

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

$$\vec{E} = k\lambda \left[ \frac{1}{\sqrt{(a-L)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \hat{i} + \frac{k\lambda}{b} \left[ \frac{L-a}{\sqrt{(a-L)^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \hat{j} \quad (13)$$

b) Potencial electrostático.

Usando los mismos vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  anteriores, podemos escribir el potencial electrostático como

$$V = \int_0^L \frac{k\lambda dx}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \quad (14)$$

integrando, se obtiene el potencial en el punto  $P(a,b)$

$$V = k\lambda \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{(a-L) + \sqrt{(a-L)^2 + b^2}} \right) \quad (15)$$

#### Equation Section (Next)

4.- Considere una lámina plana de carga en la forma que se muestra en la Fig. 4.1. Los círculos tienen radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , y la densidad superficial de carga vale  $\sigma = \frac{\alpha}{r}$ , donde  $\alpha > 0$  es constante. En el punto  $P$ , a una distancia  $z$  sobre la lámina, calcule, a) el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ , b) el potencial electrostático  $V(\vec{r})$ .

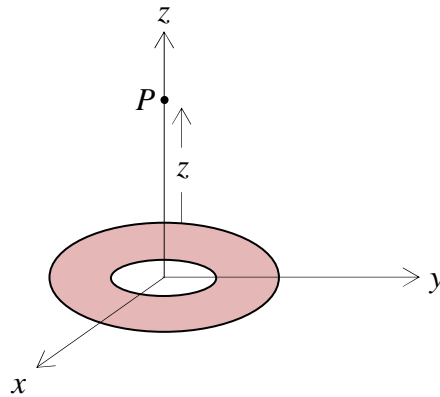


Figura 4.1 Campo eléctrico creado por una lámina de carga.

#### Solución:

a) Cálculo del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$



Consideremos un elemento diferencial de carga  $dq'$  que se encuentra ubicado en la placa, distribuido en un elemento diferencial de superficie  $dS$ . Dado que  $\sigma = \frac{dq'}{dS}$ , se tiene que

$dq' = \sigma dS$ . Pero  $\sigma = \left(\frac{\alpha}{r}\right)$ , luego,  $dq' = \left(\frac{\alpha}{r}\right) dS$ . El diferencial de superficie de la placa viene dado por  $dS = dsdr = (rd\theta)dr$  (ver Fig. 4.2).

Por lo tanto,  $dq' = \alpha drd\theta$ . La variable  $r$  varía desde  $r = a$  hasta  $r = b$ , y la variable  $\theta$  varía desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = 2\pi$ .

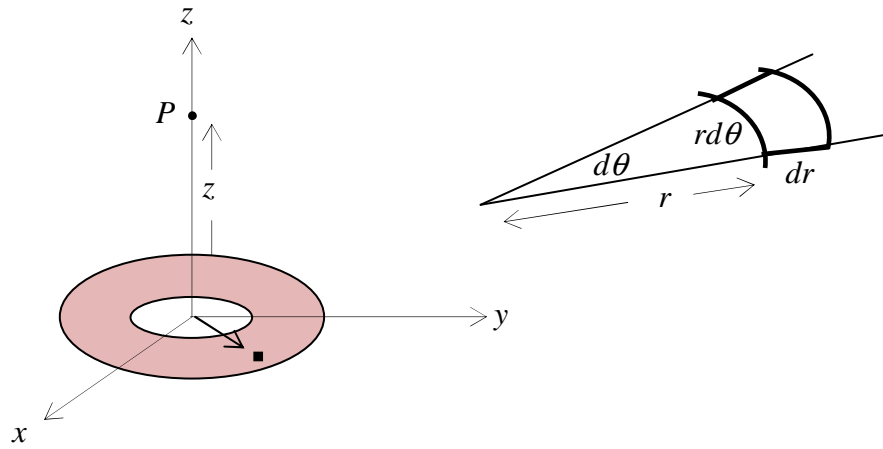


Figura 4.2 Elemento diferencial de carga en la superficie diferencial.

Los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por

$$\begin{aligned}\vec{r} &= z\hat{k} \\ \vec{r}' &= r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}\end{aligned}\tag{1}$$

Con esos valores se tiene

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}' &= (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z\hat{k}) \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + z^2}\end{aligned}\tag{2}$$

Reemplazando en la expresión del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ , obtenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int \frac{k \alpha dr d\theta (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z\hat{k})}{(r^2 + z^2)^{3/2}}\tag{3}$$

separando integrales

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k\alpha \int \frac{rdr \cos \theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{i} - k\alpha \int \frac{rdr \sin \theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{j} + k\alpha z \int \frac{dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (4)$$

Las integrales sobre  $\theta$  y sobre  $r$  se pueden hacer por separado. Sin embargo, las dos primeras integrales sobre la parte angular valen cero, es decir,

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 \quad (5)$$

Por lo tanto, las dos primeras integrales de la relación (4) se anulan. En consecuencia, el campo eléctrico sólo tiene componente  $z$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\alpha z \int_a^b \frac{dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = 2\pi k\alpha z \int_a^b \frac{dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (6)$$

Integrando la parte radial, se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2\pi k\alpha}{z} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \hat{k} \quad (7)$$

Casos particulares.

i) Si en (7) hacemos tender el radio interior  $a$  a cero,  $a \rightarrow 0$ , entonces obtenemos el campo eléctrico producido por un disco de radio  $b$ ,

$$\vec{E}_{disco}(\vec{r}) = \frac{2\pi k\alpha}{z} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \hat{k} \quad (8)$$

ii) Si en (8) hacemos tender el radio  $b$  a infinito,  $b \rightarrow \infty$ , se obtiene el campo eléctrico generado por un plano infinito de carga,

$$\vec{E}_{plano\ infinita}(\vec{r}) = \frac{2\pi k\alpha}{z} \hat{k} \quad (9)$$

b) Cálculo del potencial eléctrico  $V(\vec{r})$

El potencial viene dado por  $V(\vec{r}) = \int \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int \frac{k(\alpha dr d\theta)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ . Usando los datos calculados anteriormente, escribimos

$$V(\vec{r}) = k\alpha \int_{r=a}^{r=b} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta \quad (10)$$

$$V(\vec{r}) = 2\pi k\alpha \int_{r=a}^{r=b} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi k\alpha \left[ \ln 2 \left( \sqrt{r^2 + z^2} + r \right) \right]_a^b \quad (11)$$

Finalmente, el potencial electrostático en el punto  $P$ , a una distancia  $z$  sobre la lámina, viene dado por

$$V(\vec{r}) = 2\pi k\alpha \left[ \ln \left( \sqrt{b^2 + z^2} + b \right) - \ln \left( \sqrt{a^2 + z^2} + a \right) \right] \quad (12)$$

A continuación se muestran algunas formas alternativas de resolver el problema

Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial.

Si hubiéramos calculado el potencial eléctrico  $V(z)$  en primer lugar, el campo eléctrico

$\vec{E}(z)$  se puede calcular a partir del potencial  $V(z)$  a través de la relación

$$\vec{E}(z) = -\frac{dV(z)}{dz} \hat{k} \quad (13)$$

Usando  $V(z)$  dado por la relación (12), se tiene

$$\vec{E}(z) = -\frac{dV(z)}{dz} \hat{k} = -2\pi k\alpha \frac{d}{dz} \left[ \ln \left( \sqrt{b^2 + z^2} + b \right) - \ln \left( \sqrt{a^2 + z^2} + a \right) \right] \hat{k} \quad (14)$$

$$\vec{E}(z) = -2\pi k\alpha z \left[ \frac{1}{\left( \sqrt{b^2 + z^2} + b \right) \sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{\left( \sqrt{a^2 + z^2} + a \right) \sqrt{a^2 + z^2}} \right] \hat{k} \quad (15)$$

Amplificando arriba y debajo de cada término, tenemos

$$\vec{E}(z) = -2\pi k\alpha z \left[ \frac{\left( \sqrt{b^2 + z^2} - b \right)}{z^2 \sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{\left( \sqrt{a^2 + z^2} - a \right)}{z^2 \sqrt{a^2 + z^2}} \right] \hat{k} \quad (16)$$

Finalmente, se obtiene ,

$$\vec{E}(z) = \frac{2\pi k\alpha}{z} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \hat{k} \quad (17)$$

Este resultado es idéntico al obtenido usando la ley de Coulomb en relación (7).

Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico.

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

Si el campo eléctrico  $\vec{E}(z)$  es conocido entre los dos puntos de referencia:  $ref \rightarrow \infty$  y  $r$ ,

el potencial electrostático viene dado por  $V(\vec{r}) = -\int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . En este caso,  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edl$ ,

porque ambos vectores son anti paralelos. Pero  $dl = -dz$ , luego,  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edz$ . Usando el campo eléctrico  $\vec{E}(z)$  dado por relación (17), se tiene

$$V(z) = -\int_{ref}^r Edz = -\int_{\infty}^z \frac{2\pi k\alpha}{z} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] dz \quad (18)$$

$$V(z) = -2\pi k\alpha \left[ \int_{\infty}^z \frac{bdz}{z\sqrt{b^2 + z^2}} - \int_{\infty}^z \frac{adz}{z\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \quad (19)$$

integrando,

$$V(z) = -2\pi k\alpha \left\{ -\ln \left( \frac{\sqrt{b^2 + z^2} + b}{z} \right) \right\}_{\infty}^z + \ln \left( \frac{\sqrt{a^2 + z^2} + a}{z} \right) \right\}_{\infty}^z \quad (20)$$

aplicando los límites de integración, se obtiene el mismo resultado que la expresión (12)

$$V(\vec{r}) = 2\pi k\alpha \left[ \ln \left( \sqrt{b^2 + z^2} + b \right) - \ln \left( \sqrt{a^2 + z^2} + a \right) \right] \quad (21)$$

#### Equation Section (Next)

5.- Hallar el potencial electrostático  $V(\vec{r})$  en el punto  $P$ , a una distancia  $z$  sobre el eje de la lámina circular de radio  $R$ , a la cual le falta un sector circular que suscribe un ángulo  $\theta_0$ , tal como se indica en la Fig. 5.1. La lámina tiene una densidad superficial de carga  $\sigma_0 = \frac{\beta}{r}$ .

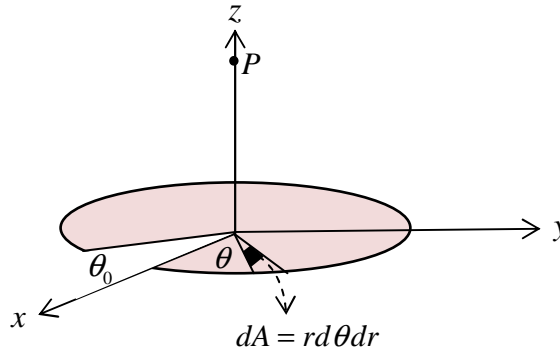


Figura 5.1 Potencial de una lámina recortada con carga.

**Solución:**

El potencial electrostático  $V(\vec{r})$  viene dado por

$$V(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1)$$

Un elemento diferencial de carga  $dq'$  ubicado en el primer cuadrante de la lámina mostrada en la Fig. 5.1, se encuentra a una distancia variable  $r$  del origen y hace un ángulo  $\theta$  variable con el eje  $x$ . Las coordenadas  $(x, y)$  del elemento diferencial de carga  $dq'$ , vienen dadas por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (2)$$

El elemento diferencial de carga  $dq'$  viene dado por

$$dq' = \sigma dA = \sigma (r d\theta dr) \quad (3)$$

Dado que ya tenemos el origen del sistema de referencia en el centro de la lámina, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z \hat{k} \\ \vec{r}' &= r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} \end{aligned} \quad (4)$$

Restando los vectores y calculando el módulo de la resta, se tiene,

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= -r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + z^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Luego el potencial  $V(\vec{r})$  viene dado por

$$V(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_{\theta=0}^{\theta=(2\pi-\theta_0)} \int_{r=0}^{r=R} \frac{k \sigma r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (6)$$

El ángulo  $\theta$  varía desde  $\theta=0$  hasta  $\theta=(2\pi-\theta_0)$ , y la variable  $r$  varía desde  $r=0$  hasta  $r=R$ . Además, dado que la densidad superficial de carga  $\sigma = \frac{\beta}{r}$  depende sólo de la variable  $r$ , y como las coordenadas  $r$  y  $\theta$  son independientes, las integrales se calculan de forma independiente,

$$V(\vec{r}) = \int_{\theta=0}^{\theta=(2\pi-\theta_0)} d\theta \int_{r=0}^{r=R} \frac{k \sigma r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (7)$$

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

$$V(\vec{r}) = (2\pi - \theta_0)k \int_{r=0}^{r=R} \frac{\beta r dr}{r\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (8)$$

$$V(\vec{r}) = (2\pi - \theta_0)k\beta \int_{r=0}^{r=R} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (9)$$

$$V(\vec{r}) = (2\pi - \theta_0)k\beta \ln \left[ \sqrt{r^2 + z^2} + r \right] \Big|_{r=0}^{r=R} \quad (10)$$

Finalmente, el potencial creado por la lámina vale

$$V(\vec{r}) = (2\pi - \theta_0)k\beta \ln \left( \frac{\sqrt{R^2 + z^2} + R}{|z|} \right) \quad (11)$$

#### Equation Section (Next)

6.-Hallar el campo eléctrico y el potencial electrostático en el punto  $P$  ubicado en el eje de un cascarón cilíndrico y exterior a él. El cascarón tiene radio  $R$ , largo  $L$  y densidad de carga  $\sigma = cte$  distribuida homogéneamente en su superficie.

#### Solución:

En la Fig. 6.1 hemos dibujado el diferencial de carga  $dq'$  en la posición arbitraria  $\vec{r}' = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z')$  respecto al origen del sistema de referencia, donde  $R$  es el radio constante del cascarón cilíndrico y  $z'$  es la posición a lo largo del eje  $z$ . Además hemos indicado el campo eléctrico diferencial  $d\vec{E}$  que produce en el punto de observación  $P$ .

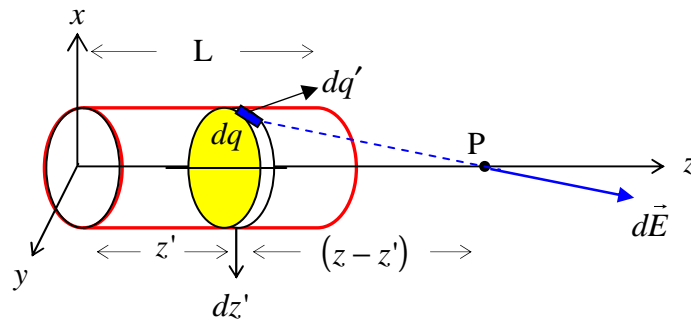


Figura 6.1 Campo eléctrico y potencial creado por un cascarón cilíndrico de carga.

Recordemos que para distribuciones continuas de carga ubicadas en  $\vec{r}'$ , el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  en el punto  $P$  definido por el vector posición  $\vec{r}$ , viene dado por la expresión general,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1)$$

y el potencial electrostático  $V(\vec{r})$  viene dado por,

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2)$$

Ambos conceptos están relacionados, de modo que a partir del potencial  $V(\vec{r})$  podemos obtener el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  en la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad (3)$$

y a partir del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  podemos obtener el potencial  $V(\vec{r})$  en la forma,

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4)$$

a) Cálculo del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  (método vectorial).

De acuerdo a la Fig. 6.1, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z\hat{k} \\ \vec{r}' &= R \cos \varphi \hat{i} + R \sin \varphi \hat{j} + z'\hat{k} \end{aligned} \quad (5)$$

Recordemos que por convención,  $\vec{r}$  es el vector que va del origen del sistema de referencia al punto  $P$  de observación del campo y  $\vec{r}'$  es el vector que va del origen del sistema de referencia al punto donde está ubicada la diferencial de carga  $dq'$ . El vector  $(\vec{r} - \vec{r}')$  viene dado por

$$(\vec{r} - \vec{r}') = -R \cos \varphi \hat{i} - R \sin \varphi \hat{j} + (z - z')\hat{k} \quad (6)$$

su módulo vale

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + (z - z')^2} \quad (7)$$

entonces el campo eléctrico se expresa como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k(\sigma dA)(-R \cos \varphi \hat{i} - R \sin \varphi \hat{j} + (z - z')\hat{k})}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (8)$$

donde hemos escrito el elemento diferencial de carga superficial en la forma  $dq' = \sigma dA$ . La diferencial de superficie  $dA$  del manto cilíndrico viene dado en la siguiente forma, usando coordenadas cilíndricas:  $dA = R d\varphi dz'$ . Reemplazando en la expresión anterior, se tiene

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k(\sigma R d\varphi dz')(-R \cos \varphi \hat{i} - R \sin \varphi \hat{j} + (z - z') \hat{k})}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (9)$$

Las componentes  $E_x$  y  $E_y$  del campo se anulan, ya que se anulan las integrales sobre el ángulo  $\varphi$ ,

$$E_x = -\int \frac{k\sigma R^2 \cos \varphi d\varphi dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = -\int_0^L \frac{k\sigma R^2 dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0 \quad (10)$$

$$E_y = -\int \frac{k\sigma R^2 \sin \varphi d\varphi dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = -\int_0^L \frac{k\sigma R^2 dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0 \quad (11)$$

Por lo tanto, la única componente del campo eléctrico que es distinta de cero, es la componente  $E_z$

$$E_z = \int \frac{k\sigma R d\varphi dz'(z - z')}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = k\sigma R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L \frac{(z - z') dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (12)$$

Calculando las integrales, se tiene  $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ , y

$$\int_0^L \frac{(z - z') dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \left. \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \right|_0^L \quad (13)$$

reemplazando en (12), tenemos

$$E_z = k\sigma 2\pi R \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \quad (14)$$

En consecuencia, el campo eléctrico resultante de todo el cascarón cilíndrico de carga apunta sólo en la dirección  $z^+$ , es decir,  $\vec{E} = E_z \hat{k}$ .

$$\vec{E} = k\sigma 2\pi R \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{k} \quad (15)$$

b) Cálculo del potencial eléctrico  $V(\vec{r})$  (método vectorial).

Usando la definición vectorial del potencial  $V(\vec{r})$  podemos escribir

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int \frac{k\sigma R d\varphi dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} = k\sigma R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \quad (16)$$



$$V(\vec{r}) = k\sigma R 2\pi \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \quad (17)$$

$$\int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} = -\ln \left( (z - z') + \sqrt{R^2 + (z - z')^2} \right) \Big|_0^L \quad (18)$$

Reemplazando este resultado, el potencial electrostático del cascarón cilíndrico viene dado por:

$$V(\vec{r}) = k\sigma R 2\pi \left[ \ln \left( z + \sqrt{R^2 + z^2} \right) - \ln \left( (z - L) + \sqrt{R^2 + (z - L)^2} \right) \right] \quad (19)$$

c) Cálculo del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  a partir del potencial  $V(\vec{r})$  conocido.

Usando la relación  $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\frac{dV(z)}{dz}$ , considerando el potencial obtenido en (19),

se tiene

$$\vec{E}(z) = -k\sigma R 2\pi \left[ \frac{d}{dz} \ln \left\{ z + \sqrt{R^2 + z^2} \right\} - \frac{d}{dz} \ln \left\{ (z - L) + \sqrt{R^2 + (z - L)^2} \right\} \right] \hat{k} \quad (20)$$

calculando las derivadas, se obtiene

$$\vec{E}(z) = -k\sigma R 2\pi \left[ \frac{1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}}{z + \sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1 + \frac{(z - L)}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}}}{(z - L) + \sqrt{R^2 + (z - L)^2}} \right] \hat{k} \quad (21)$$

Simplificando, se obtiene el mismo campo eléctrico encontrado anteriormente a partir de la definición vectorial

$$\vec{E}(z) = k\sigma R 2\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{k} \quad (22)$$

d) Cálculo del potencial eléctrico  $V(\vec{r})$  a partir del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  conocido.

Usando la relación  $V(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  y considerando una trayectoria que va desde infinito

hasta las cercanías del cascarón cilíndrico siguiendo, por simplicidad, la dirección  $-\hat{k}$ , es

decir, desde infinito hasta una distancia  $z$  del cilindro. vemos que  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dl$ . Por otra

parte, se cumple que  $dl = -dz$ . Entonces,  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dz$  y podemos escribir

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

$$V(\vec{r}) = -\int E dz = -k\sigma R 2\pi \int_{\infty}^z \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) dz \quad (23)$$

Integrando se obtiene el mismo potencial  $V(z)$  hallado anteriormente en la relación (19),

$$V(z) = k\sigma R 2\pi \ln \left[ \frac{z + \sqrt{R^2 + z^2}}{(z-L) + \sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right] \quad (24)$$

f) Cálculo del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  del cascarón cilíndrico usando el campo de un anillo de carga (Método de las aportaciones infinitesimales)

Este método es bastante general y permite calcular el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  y el potencial  $V(\vec{r})$  en distintas situaciones en las que la distribución de carga puede ser subdividida en distribuciones de carga de menor dimensión. Este método tiene ventajas sobre los otros métodos si la distribución de carga de menor dimensión es calculable de manera mucho más sencilla que usando el método vectorial.

En el caso del cascarón cilíndrico que estamos estudiando, debemos usar un alambre circular de carga para calcular el cascarón completo. La Fig. 6.2 muestra la forma en que el cascarón cilíndrico puede ser subdividido en infinitos alambres de radio  $R$  con diferencial de carga  $dq'$  y espesor  $dz'$ . Cada alambre de carga se encuentra a la distancia  $(z - z')$  del punto  $P$ . Allí también puede verse el campo diferencial  $d\vec{E}$  creado por el alambre de carga.

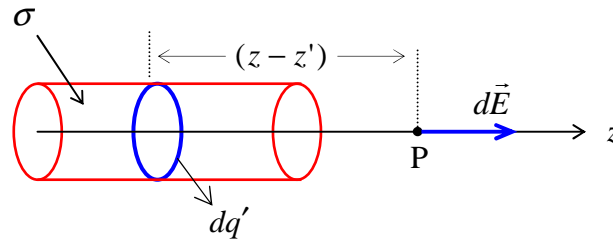


Figura 6.2 Anillo diferencial de carga para calcular campo y potencial eléctricos.

Sabemos que campo eléctrico  $\vec{E}$  creado por un alambre de radio  $R$  y carga  $Q$ , depende sólo de la distancia  $z$  sobre el plano del alambre y apunta en la dirección del eje  $z$ . El campo vale,

$$\vec{E} = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (25)$$

Para el alambre con carga diferencial  $dq'$  mostrado en la Fig. 6.2, el campo eléctrico es un campo diferencial  $d\vec{E}$  que se escribe en la siguiente forma,

$$dE_z = \frac{k dq' (z - z')}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (26)$$

Nótese el cambio de  $z \rightarrow (z - z')$  y de  $Q \rightarrow dq'$ . Estos cambios contienen la esencia del método que estamos tratando. Ahora sólo nos falta escribir el diferencial de carga  $dq'$  del alambre en función de la variable  $z'$ . La Fig. 6.3 muestra un anillo diferencial de radio  $R$  y espesor  $dz'$

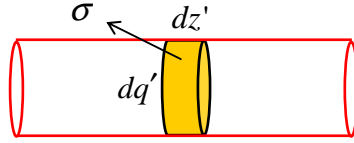


Figura 6.3 Anillo diferencial de carga.

El área diferencial vale  $dA = 2\pi R dz'$ , y por lo tanto, la carga diferencial vale  $dq' = \sigma 2\pi R dz'$ . El campo diferencial  $dE_z$  se puede escribir en la forma

$$dE_z = \frac{k\sigma 2\pi R (z - z') dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (27)$$

Por el principio de superposición sumamos todos los campos diferenciales para obtener el campo resultante,

$$E_z = \int_0^L \frac{k\sigma 2\pi R (z - z') dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (28)$$

Al realizar la integración obtenemos el mismo campo resultante obtenido anteriormente en relación (22),

$$E_z = k\sigma 2\pi R \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \quad (29)$$

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

g) Cálculo del potencial eléctrico  $V(\vec{r})$  del cascarón cilíndrico usando el potencial de un anillo de carga (Método de las aportaciones infinitesimales).

Procediendo de manera similar al problema anterior, usaremos el potencial creado por un alambre de radio  $R$  y carga  $Q$ . Dicho potencial depende sólo de la distancia  $z$  sobre el plano del alambre. El potencial del alambre vale

$$V(z) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (30)$$

Entonces, el potencial  $dV$  para el alambre con carga diferencial  $dq'$  mostrado en la Fig. 6.3, se escribe en la siguiente forma:

$$dV = \frac{k dq'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \quad (31)$$

Nótese nuevamente que hemos hecho el siguiente cambio:  $z \rightarrow (z - z')$  y  $Q \rightarrow dq'$ . Usando  $dq' = \sigma 2\pi R dz'$  e integrando, escribimos,

$$V(z) = \int dV = \int_0^L \frac{k\sigma 2\pi R dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \quad (32)$$

Al calcular la integral, se obtiene el mismo resultado encontrado anteriormente

$$V(z) = k\sigma R 2\pi \ln \left[ \frac{z + \sqrt{R^2 + z^2}}{(z - L) + \sqrt{R^2 + (z - L)^2}} \right] \quad (33)$$

7.- a) Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto  $P$  exterior a un cilindro con densidad volumétrica de carga  $\rho = cte$ , radio  $R$  y altura  $L$ , cuyo eje coincide con el eje  $z$ , tal como se muestra en la figura. b) Calcule el potencial electrostático  $V$ .

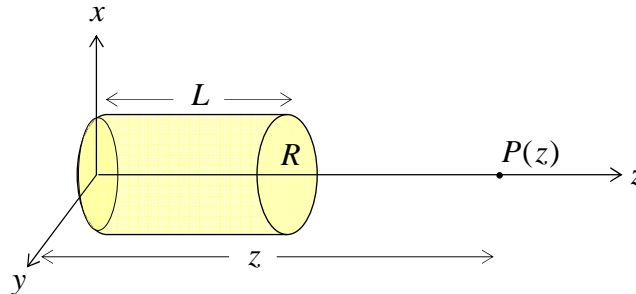


Figura 7.1 Cilindro de carga que crea campo eléctrico y potencial.

**Solución:**

a) Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}$

En primer lugar, consideremos un diferencial de carga  $dq' = \rho dV$ , donde el volumen  $dV$  corresponde al volumen diferencial de carga ubicado a una distancia  $z'$  de la base del cilindro. En coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ , se tiene

$$dV = r d\phi dr dz' \quad (34)$$

Poniendo el origen del sistema de coordenadas en la base del cilindro, se tiene,

$$\vec{r} = z \hat{k} \quad (35)$$

donde  $z$  localiza al punto fijo  $P$ . La posición del elemento diferencial de volumen viene dada por,

$$\vec{r}' = r \cos \phi \hat{i} + r \sin \phi \hat{j} + z' \hat{k} \quad (36)$$

donde  $r$  es el radio variable del elemento de volumen medido desde el eje del cilindro.

Usando los valores conocidos,  $(\vec{r} - \vec{r}')$  viene dado por,

$$(\vec{r} - \vec{r}') = (z - z') \hat{k} - r \cos \phi \hat{i} - r \sin \phi \hat{j} \quad (37)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2} \quad (38)$$

El campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (39)$$

dado que la densidad volumétrica de carga  $\rho$  es constante, se tiene,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(-r \cos \phi \hat{i} - r \sin \phi \hat{j} + (z - z') \hat{k}) r d\phi dr dz'}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (40)$$

Dado que las integrales son separables porque las coordenadas son independientes, y dado que la coordenada  $\phi$  varía entre 0 y  $2\pi$ , las integrales sobre los ejes  $x$  e  $y$  se anulan, ya

que  $\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$ . Luego, la última integral queda,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int \frac{(z - z') r dr dz'}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (41)$$

### 2.2.2 Unidad I: Problemas Resueltos

Separemos las integrales,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^h (z - z') dz' \int_0^R \frac{r dr}{\left(r^2 + (z - z')^2\right)^{3/2}} \hat{k} \quad (42)$$

Integrando primero sobre la variable  $r$  para  $(z - z')$  fijo, se obtiene,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^L (z - z') dz' \left( \frac{1}{|z - z'|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \right) \hat{k} \quad (43)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^L \left( \frac{z - z'}{|z - z'|} - \frac{z - z'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \right) dz' \hat{k} \quad (44)$$

Dado que  $z - z' > 0$ , se puede simplificar el integrando, obteniendo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \int_0^L dz' - \int_0^L \frac{(z - z') dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \right] \hat{k} \quad (45)$$

El campo eléctrico resultante depende sólo de la variable  $z$ ,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ L + \sqrt{R^2 + (z - L)^2} - \sqrt{R^2 + z^2} \right] \hat{k} \quad (46)$$

b) Calcule el potencial electrostático  $V_p$ .

El potencial viene dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (47)$$

Considerando el mismo elemento de volumen, y reemplazando los valores obtenidos antes, se tiene

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho r d\phi dr dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (48)$$

Integrando sobre  $\phi$ , y separando las integrales, se tiene,

$$V(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^L dz' \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (49)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^L dz' \left[ \sqrt{R^2 + (z - z')^2} - |z - z'| \right] \quad (50)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \int_0^L \sqrt{R^2 + (z - z')^2} dz' - \int_0^L |z - z'| dz' \right] \quad (51)$$

Integrando se obtiene  $V(z)$ ,

$$V(z) = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \left( L^2 - 2zL - (z - L) \sqrt{(z - L)^2 + R^2} + z \sqrt{z^2 + R^2} \right) - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \ln \left( \frac{(z - L) + \sqrt{(z - L)^2 + R^2}}{z + \sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (52)$$





### 2.2.3 Unidad II: Ley de Gauss

En esta Unidad se obtiene la ley de Gauss para una carga puntual y luego se generaliza esta ley a partir de una gran variedad de evidencia experimental. Luego se aplica la ley de Gauss para calcular el módulo del campo eléctrico para diferentes tipos de distribuciones de carga, los cuales presentan ciertas simetrías especiales.

#### 1.- Ley de Gauss

Ya vimos en el capítulo 1 que el campo eléctrico generado por una carga puntual  $q$  en reposo, a una distancia radial  $r$ , viene dado por

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{e}_r \quad (2.1)$$

donde hemos elegido la posición de la carga puntual como el origen del sistema de referencia para medir el campo eléctrico. La Fig. 2.1(a) muestra una carga puntual  $q$  encerrada por una superficie arbitraria  $S$ . Allí se han dibujado varias líneas de campo eléctrico  $\vec{E}$ , que salen radialmente desde la carga  $q$ . También se han dibujado los vectores diferenciales de superficie  $d\vec{S}$  que son perpendiculares a una tangente a la superficie en cada punto.

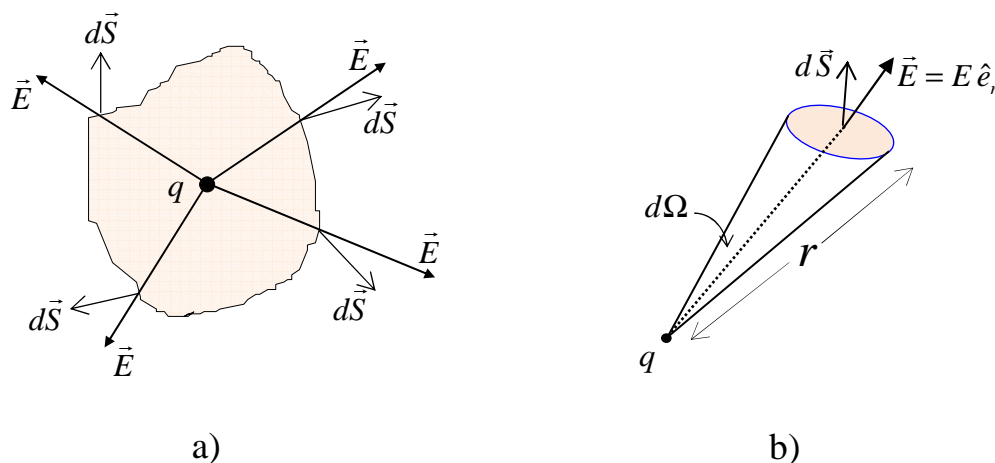


Figura 2.1 Ley de Gauss

### 2.2.3 Unidad II: Ley de Gauss

En la Fig. 2.1(b) hemos dibujado un cono asociado al *ángulo sólido diferencial*  $d\Omega$ , el cual se define como  $d\Omega = \left( \frac{\hat{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} \right)$ , donde  $\hat{e}_r$  es un vector unitario en la dirección radial en la cual apunta el campo eléctrico, y  $r$  es la distancia radial desde la carga  $q$  a la superficie. El ángulo sólido  $\Omega$  se mide en estereoradianes.

Si multiplicamos el campo eléctrico dado por la ecuación (2.1) por un diferencial de superficie  $d\vec{S}$  a través del producto punto de vectores, se tiene

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = kq \left( \frac{\hat{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} \right) \quad (2.2)$$

reemplazando en esta relación la definición de ángulo sólido  $d\Omega$ , obtenemos

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = kq d\Omega \quad (2.3)$$

integrando sobre la superficie cerrada, obtenemos el flujo del campo eléctrico a través de la superficie cerrada  $S$ ,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = kq \oint_S d\Omega \quad (2.4)$$

El ángulo sólido total sobre cualquier superficie  $S$  cerrada vale  $4\pi$ , es decir,

$$\oint_S d\Omega = 4\pi \quad (2.5)$$

Reemplazando este valor en (2.4), obtenemos

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = kq 4\pi \quad (2.6)$$

pero  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , con lo cual se obtiene la forma final de la ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

*El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada cualquiera que contiene a una única carga puntual  $q$  en reposo, es igual al valor de la carga  $q$ , dividido por la permitividad eléctrica del vacío*

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

Naturalmente que si la carga no se encuentra dentro de la superficie Gaussiana, entonces el flujo cerrado vale cero,  $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ .

Consideremos ahora que tenemos un conjunto de  $N$  cargas puntuales  $q_j$  encerradas dentro de la Gaussiana. El Principio de Superposición indica que el campo eléctrico resultante  $\vec{E}$  es la suma vectorial de los campos eléctricos individuales,  $\vec{E} = \sum_{j=1}^N \vec{E}_j$ . Reemplazando este resultado en (2.8), la integral de flujo viene dada por

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_s \left( \sum_{j=1}^N \vec{E}_j \right) \cdot d\vec{S} \quad (2.9)$$

Cambiamos la sumatoria por la integral porque ambos operadores son lineales, se obtiene

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{j=1}^N \left( \oint_s \vec{E}_j \cdot d\vec{S} \right) \quad (2.10)$$

La aplicación de la ley de Gauss a cada carga por separado, independientemente de la presencia de las otras cargas encerradas en la superficie Gaussiana nos da

$$\oint_s \vec{E}_j \cdot d\vec{S} = \frac{q_j}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

Reemplazando este resultado en la relación (2.9), se tiene

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{j=1}^N \left( \oint_s \vec{E}_j \cdot d\vec{S} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^N q_j = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (2.13)$$

donde  $q_{\text{neta}} = \sum_j q_j$ , es la carga total o carga neta contenida dentro de la superficie Gaussiana y corresponde a la suma algebraica de cargas. En consecuencia, si  $q_{\text{neta}} = \sum_j q_j = 0$ , el flujo sobre la superficie cerrada vale cero. Por lo tanto, *lo relevante para la ley de Gauss es la carga neta o carga total encerrada dentro de la Gaussiana.*

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

Si dentro de la Gaussiana encerramos una distribución continua de carga determinada por la densidad volumétrica de carga  $\rho(\vec{r}') = \frac{dq'}{dV'}$ , entonces, la carga neta  $q_{\text{neta}}$  encerrada dentro de la superficie Gaussiana se obtiene a través de la integral

### 2.2.3 Unidad II: Ley de Gauss

$$q_{neta} = \int_V dq' = \int_V \rho(\vec{r}') dV \quad (2.15)$$

donde  $V$  es el volumen encerrado por la superficie Gaussiana. Reemplazando este resultado en (2.14), tenemos

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV \quad (2.16)$$

Es importante destacar que la carga que está fuera de la superficie Gaussiana no contribuye al flujo eléctrico sobre la superficie Gaussiana. Esto no significa que las cargas externas no sean importantes, ni tampoco significa que pierdan su significado físico, lo que ocurre es *que el flujo eléctrico neto que producen las cargas eléctricas que se encuentran fuera de la superficie Gaussiana es cero siempre.*

#### 2.- Forma diferencial de la ley de Gauss.

Para obtener la forma diferencial de la ley de Gauss, usemos el teorema matemático de la divergencia de campos vectoriales. Este teorema indica que el flujo sobre la superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia del campo sobre el volumen encerrado por la superficie Gaussiana, esto es,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad (2.17)$$

donde  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  es la divergencia del campo eléctrico vectorial, y donde  $dV$  es la diferencial de volumen encerrado por la superficie  $S$ . Reemplazando este resultado en la ley de Gauss (2.16), se tiene

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV \quad (2.18)$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV \quad (2.19)$$

$$\left( \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}') \right) dV = 0 \quad (2.20)$$

para que esta relación sea válida para cualquier volumen arbitrario, se debe cumplir que el integrando sea cero, es decir,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.21)$$

Esta es la forma diferencial de la ley de Gauss, y al mismo tiempo es la forma diferencial de una de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo.

### 3.- Ley de Gauss con dieléctricos

Cuando queremos calcular el módulo del campo eléctrico en regiones donde existen materiales dieléctricos, entonces debemos generalizar la ley de Gauss, debido a que la presencia de los materiales dieléctricos provoca cambios en el campo eléctrico. Lo que ocurre es que aparecen cargas de polarización inducidas en los dieléctricos, tal como se mostró al final de la unidad I. Estas cargas inducidas generan campos eléctricos que se oponen al campo externo que actúa sobre el dieléctrico. Por dicha razón, el campo total resultante es menor que el campo eléctrico externo. Experimentalmente se encuentra que la relación entre el campo eléctrico sin dieléctrico  $E_0$  y el campo eléctrico con dieléctrico  $E_d$ , viene dada por

$$\frac{E_0}{E_d} = k \quad (22)$$

donde  $k \geq 1$  se denomina constante dieléctrica. Experimentalmente,  $k$  depende de cada dieléctrico. Para el aire o el vacío, los valores de  $k$  son casi los mismos:  $k = 1$ .

Por otra parte, cuando comparamos la relación entre las diferencias de potencial en regiones sin dieléctrico ( $V_0$ ) y con dieléctrico ( $V_d$ ), se observa experimentalmente que

$$\frac{V_0}{V_d} = k \quad (23)$$

La influencia de los dieléctricos sobre el campo eléctrico permite generalizar a ley de Gauss sin dieléctricos que viene dada por la relación (2.13). Experimentalmente, la ley de Gauss con dieléctricos viene dada por,

$$\oint_S k \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (24)$$

donde  $q_{\text{neta}}$  es la carga neta libre, es decir, no contiene a las cargas de polarización inducidas. Nótese que ahora el campo eléctrico  $\vec{E}$  aparece multiplicado por la constante dieléctrica  $k$ .

### 2.2.3 Unidad II: Ley de Gauss

#### 4.- Aplicaciones de la Ley de Gauss.

La ley de Gauss en su forma integral dada por (2.14) o por (2.16), es una ley que permite obtener fácilmente el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada llamada superficie Gaussiana. Esta ley tiene validez universal, ya que más adelante veremos que sigue siendo válida aún en el caso dinámico. Además debemos agregar que *esta ley no es una ley destinada a calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$* . Sin embargo, *a través de esta ley podemos calcular el módulo  $E$  del campo eléctrico  $\vec{E}$*  en ciertas situaciones muy especiales en que la carga  $q$  o la densidad de carga  $\rho$  (o  $\sigma$  o  $\lambda$ ) están distribuidas con cierta simetría, de modo de poder dibujar una superficie Gaussiana sobre la cual se produzcan ciertas condiciones, tales como:

- a) que el campo eléctrico  $\vec{E}$ , cuya forma conocemos de manera aproximada (sus líneas de campo), sea constante en módulo sobre toda la superficie Gaussiana; o
- b) que el campo  $\vec{E}$ , cuya forma conocemos de manera aproximada, sea constante en módulo sobre una parte de la superficie Gaussiana, y además que la integral  $\int_s \vec{E} \cdot d\vec{S}$  se anule sobre las otras partes de la superficie Gaussiana.

Cuando alguna de estas condiciones se cumple, debido a la forma en que están distribuidas las cargas que crean el campo eléctrico  $\vec{E}$ , entonces podemos obtener el módulo del campo eléctrico en alguna región de interés. Estas regiones pueden contener o no regiones parcial o totalmente llenas con dieléctrico.

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

En esta parte del Dossier aplicamos la ley de Gauss para resolver problemas en los cuales se pueda calcular el módulo del campo eléctrico. Dependiendo del tipo de simetría de la distribución de carga se usa la ley de Gauss de manera directa. Si ésto no es posible, se usa la ley de Gauss combinada con el Principio de Superposición.

### Equation Chapter 2 Section 2

1.- Hallar el módulo del campo eléctrico creado por una carga puntual positiva en reposo.

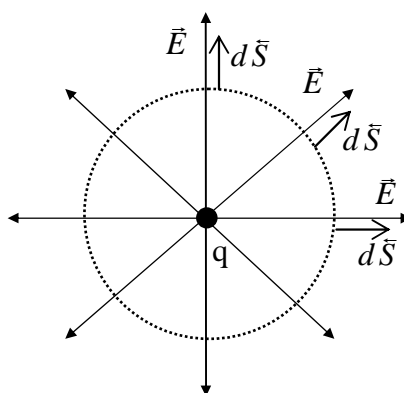


Figura 1.1 Campo eléctrico de una carga puntual.

### Solución:

Dada la simetría esférica con que salen las líneas de campo eléctrico  $\vec{E}$  desde la carga puntual  $q$ , es conveniente definir una superficie Gaussiana de forma esférica y de radio  $r$ .

En este caso, el campo eléctrico  $\vec{E}$  tiene módulo  $E$  constante sobre toda la superficie, porque el módulo del campo depende sólo de la distancia radial y ésta es constante sobre la esfera. Además, sobre cada punto de la superficie Gaussiana, los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son siempre paralelos entre sí, es decir, se cumple que  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos 0^\circ = E dS$ , por lo tanto, la ley de Gauss para este caso queda:

$$\oint_{\text{esf.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{esf.}} E dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

Dado que el módulo  $E$  del campo eléctrico es constante sobre la superficie esférica, se puede sacar  $E$  fuera de la integral

$$E \oint_{\text{esf.}} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

La integral sobre la superficie esférica vale  $\oint_{\text{esf.}} dS = S_{\text{esf.}} = 4\pi r^2$ , reemplazando y despejando el módulo del campo eléctrico  $E$  se tiene:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{kq}{r^2} \quad (2.3)$$

donde  $k = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$ . Hemos obtenido así el módulo  $E$  del campo eléctrico de una carga puntual  $q$  usando la ley de Gauss. Este resultado coincide exactamente con el valor del campo eléctrico obtenido usando la ley de Coulomb en el capítulo 1. Nótese que el módulo  $E$  del campo eléctrico tiende a cero,  $E \rightarrow 0$ , como  $\left(\frac{1}{r^2}\right)$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

2.- Hallar el campo eléctrico creado por una línea de carga de extensión infinita, de densidad lineal de carga  $\lambda = cte$ .

### Solución:

Dada la simetría cilíndrica que presenta el problema, y dado que sabemos que las líneas de campo eléctrico sólo pueden salir radialmente desde la línea de carga, ya que no pueden cortarse entre sí, es conveniente dibujar una superficie Gaussiana de forma cilíndrica de radio  $r$  y de largo finito  $L$ , tal como se muestra en la Fig. 2.1.

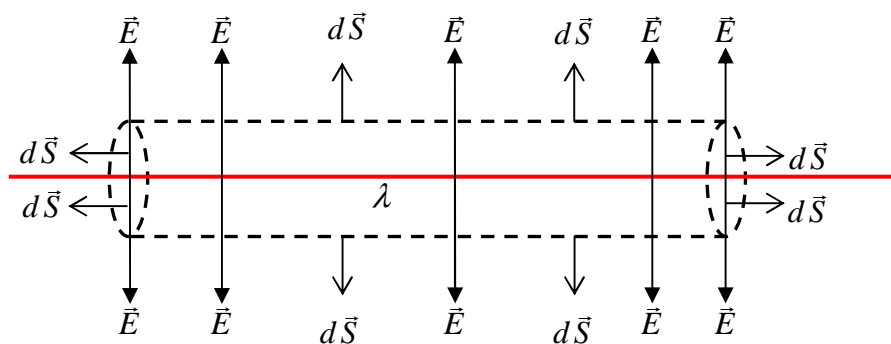


Figura 2.1 Gaussiana cilíndrica para alambre con carga muy largo.



La superficie Gaussiana está formada por tres regiones distintas:

- un manto cilíndrico de radio  $r$ , sobre el cual el vector campo eléctrico  $\vec{E}$  cruza en forma radial, y por lo tanto  $\vec{E}$  es paralelo a la diferencial de superficie  $d\vec{S}$  del manto cilíndrico. Además el módulo  $E$  del campo eléctrico es constante a la distancia radial fija  $r$ .
- sobre las tapas circulares izquierda y derecha de la Gaussiana cilíndrica el campo eléctrico  $\vec{E}$  es tangente a cada tapa, pero la diferencial de superficie  $d\vec{S}$  es perpendicular a la tapa, y por lo tanto, perpendicular al campo  $\vec{E}$ .

La Fig. 2.1 muestra la relación geométrica entre los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  para cada una de las regiones en que se divide la Gaussiana cilíndrica. Así, sobre las tapas izquierda y derecha, la contribución del campo eléctrico al flujo eléctrico es cero, ya que  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ , porque ambos vectores son perpendiculares. Por otra parte, sobre el manto de la Gaussiana cilíndrica, los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  atraviesan la superficie y salen de ella en forma paralela, por lo tanto,  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS$ . Al aplicar la ley de Gauss a esta configuración de carga, se tiene

$$\oint_{\text{cilindro Gaussiano}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{manto cilíndrico}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{tapa izquierda}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{tapa derecha}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{neta encerrada}} \quad (2.4)$$

Usando  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$  en las tapas y  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS$  en el manto cilíndrico, la relación (2.4) queda

$$\int_{\text{manto cilíndrico}} EdS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{neta encerrada}} \quad (2.5)$$

Dado que el módulo del campo eléctrico  $E$  es constante sobre la superficie Gaussiana cilíndrica, se puede sacar de la integral y la relación (2.5), queda

$$E \int_{\text{manto cilíndrico}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{neta encerrada}} \quad (2.6)$$

La integral mide la superficie  $S_{\text{manto cilíndrico}}$  del manto cilíndrico, la cual vale  $S_{\text{manto cilíndrico}} = 2\pi rL$ .

Reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos

$$E(2\pi rL) = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{neta}} \quad (2.7)$$

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

La carga encerrada dentro de la Gaussiana de radio  $r$  y largo  $L$ , se obtiene usando la densidad lineal de carga  $\lambda = \frac{dq'}{dl'}$ . Dado que estamos considerando que  $\lambda = cte$ , entonces, la carga encerrada viene dada por

$$q_{neta} = \int_{l=0}^{l=L} \lambda dl = \lambda \int_{l=0}^{l=L} dl = \lambda L \quad (2.8)$$

Insertando este resultado en la relación (2.7) y despejando, obtenemos el módulo  $E$  del campo eléctrico generado por la línea de carga infinita,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{2k\lambda}{r} \quad (2.9)$$

donde hemos usado la constante  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Nótese que el módulo  $E$  del campo eléctrico

tiende a cero,  $E \rightarrow 0$ , como  $\left(\frac{1}{r}\right)$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

3.- Hallar el campo eléctrico creado por un plano infinito de carga con densidad superficial de carga  $\sigma = cte$ .

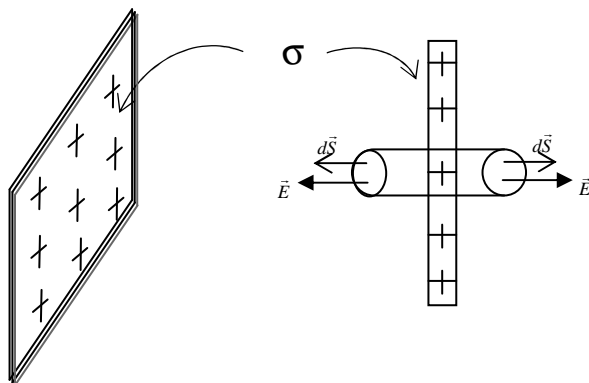


Figura 3.1 Campo eléctrico generado por un plano infinito de carga.

### Solución:

Consideremos un plano de extensión infinita con densidad superficial uniforme de carga  $\sigma$ . Dado que las líneas de campo eléctrico  $\vec{E}$  no se pueden cortar, el campo generado por la lámina de carga está formado sólo por líneas paralelas entre sí que salen

perpendicularmente al plano infinito de carga. Dada esta configuración de las líneas de campo eléctrico, conviene usar una superficie Gaussiana cilíndrica que atraviese perpendicularmente el plano infinito de carga, tal como se indica en la Fig. 3.1. En ese caso, el eje del cilindro Gaussiano coincide con las líneas de campo eléctrico. De esta forma se aprovechan algunas simetrías útiles para el cálculo del módulo del campo eléctrico usando la ley de Gauss. La ley de Gauss aplicada al cilindro Gaussiano, queda

$$\oint_{\text{cilindro Gaussiano}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{manto cilíndrico}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{tapa izquierda}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{tapa derecha}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{neta encerrada}} \quad (2.10)$$

En el manto del cilindro gaussiano ambos vectores son perpendiculares ( $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ ), ya que el campo  $\vec{E}$  es paralelo a la superficie y  $d\vec{S}$  es perpendicular a la superficie Gaussiana cilíndrica. Por lo tanto, se cumple que  $\int_{\text{manto cilíndrico}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ . En consecuencia no hay

contribución al flujo en el manto cilíndrico. Entonces, la única contribución al flujo eléctrico puede venir a través de las tapas de la Gaussiana cilíndrica. En cada una de las tapas del cilindro Gaussiano se cumple que  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ , porque ambos vectores son paralelos. Además, el módulo  $E$  del campo eléctrico en cada punto de cada una de las tapas es constante, por lo tanto, se puede sacar fuera de la integral. La integral sobre las tapas queda  $\int_{\text{tapa izquierda}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = EA$ , donde  $A$  es el área de cada tapa cilíndrica. En

consecuencia, la relación (2.10), queda,

$$\oint_{\text{cilindro Gaussiano}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = EA + EA = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{neta encerrada}} \quad (2.11)$$

$$2AE = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{neta encerrada}} \quad (2.12)$$

$$E = \frac{1}{2A\epsilon_0} q_{\text{neta encerrada}} \quad (2.13)$$

La carga neta  $q_{\text{neta}}$  encerrada en la Gaussiana cilíndrica vale:  $q_{\text{neta}} = \int_S \sigma dS = \sigma A$ , ya que

$\sigma = \text{cte}$ . Reemplazando este valor en (2.13), obtenemos el módulo del campo eléctrico creado por una placa infinita de densidad de carga  $\sigma$ ,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.14)$$

4.- Las placas metálicas de la Fig. 4.1 están cargadas con igual densidad de carga  $\sigma$ , pero de signos distintos:  $\sigma^-$  y  $\sigma^+$ . Hallar el campo eléctrico en las regiones (I) y (III) exteriores a las placas, y en la región (II) en medio de las placas. Este sistema define a un condensador de placas paralelas. La Fig. 4.1 muestra las tres regiones de interés: (I), (II) y (III) donde queremos medir el módulo del campo eléctrico.

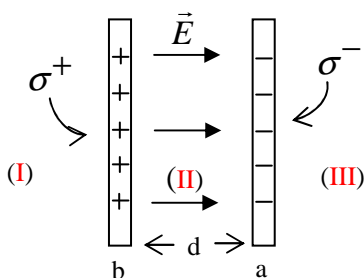


Figura 4.1 Condensador de placas paralelas.

### Solución:

La lámina metálica tiene un cierto espesor, y la carga libre está distribuida en su superficie. Esto significa que el campo eléctrico al interior del metal vale cero, es decir,  $\vec{E}_{metal} = \vec{0}$ . Estudiaremos este problema suponiendo que las placas metálicas son muy grandes y nos enfocaremos en buscar el módulo del campo eléctrico en las cercanías del centro de las placas. Hacemos esta suposición para evitar las irregularidades de las líneas de campo eléctrico en los bordes de las placas que impedirían la aplicación de la ley de Gauss para calcular el módulo del campo eléctrico.

La Fig. 4.2 muestra la posición de los cilindros gaussianos adecuados para obtener el módulo del campo eléctrico en las regiones (I) y (III) (*región exterior*), y para obtener el módulo del campo eléctrico en la región (II) (*región interior*).

Para calcular el campo eléctrico en las regiones (I) y (III), exteriores a las placas metálicas, es conveniente colocar una Gaussiana cilíndrica de manera similar a lo realizado en el ejemplo anterior, pero que atraviese las dos placas simultáneamente (lado izquierdo de la Fig. 4.2 rotulada como *región exterior*).

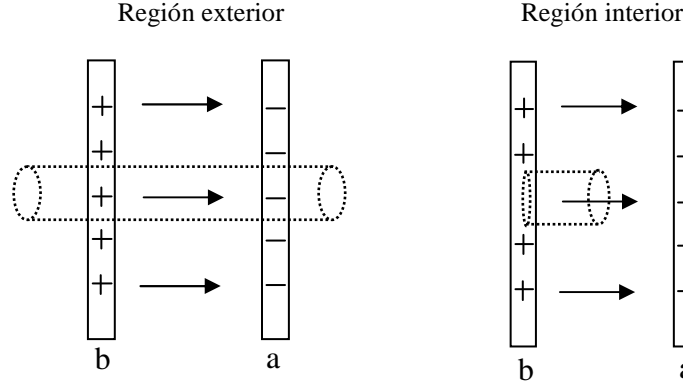


Figura 4.2 Gaussianas en cada región de interés.

En ese caso, la carga total encerrada dentro de la Gaussiana es igual a cero,  $q_{\text{neta}} = q^+ + q^- = \sigma^+ A - \sigma^- A = (\sigma^+ - \sigma^-) A = 0$ , porque existe igual cantidad de cargas positivas que negativas encerradas dentro del cilindro Gaussiano. La ley de Gauss indica que el flujo cerrado del campo eléctrico vale cero,

$$\oint_{\text{cilin}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.15)$$

En consecuencia, el campo eléctrico en las dos regiones externas vale cero, es decir,

$$E_{(I)} = E_{(III)} = 0 \quad (2.16)$$

Para hallar el campo eléctrico en la región II (región interior), se puede colocar una Gaussiana cilíndrica de modo que una de sus tapas quede en el interior de la placa metálica  $b$ , y la otra tapa quede en el espacio vacío entre las placas  $b$  y  $a$ , como se puede ver en la parte derecha de la Fig. 4.2 rotulada como *región interior*. La tapa que queda en el interior de la placa metálica positiva (placa  $b$ ) no contribuye al flujo eléctrico ya que el campo eléctrico en el interior de un conductor es cero ( $E_{\text{metal}} = 0$ ). Dado que no hay contribución al flujo eléctrico en el manto cilíndrico, ni dentro ni fuera del metal, la única contribución al flujo eléctrico proviene de la tapa que queda entre los dos conductores metálicos (entre  $b$  y  $a$ ). En dicha tapa,  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son paralelos, lo que implica que  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ . Además,  $E$  es constante en cada punto de la tapa de área  $A$ , por lo tanto, la ley de Gauss queda

$$\oint_{\text{cilin}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = EA = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}. \quad (2.17)$$

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

La carga neta encerrada por la Gaussiana cilíndrica vale  $q_{\text{neto}} = \int_S \sigma dS = \sigma A$  luego el campo eléctrico en la región (II) entre las dos placas metálicas está dado por

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (2.18)$$

finalmente el módulo del campo eléctrico queda

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

Este resultado es exactamente el doble del valor del campo eléctrico encontrado para una sola placa de carga calculado en el problema 3.

5.- Resolvamos ahora el problema 4 usando el principio de superposición.

### Solución:

Para aplicar el principio de superposición en este caso, debemos considerar por separado el campo producido por cada placa  $a$  y  $b$  de la Fig. 4.1. El campo eléctrico de cada placa metálica fue calculado en el problema 3, y su valor es

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.20)$$

La dirección del campo es tal que las líneas de campo salen perpendicularmente de la placa positiva y llegan perpendicularmente a la placa negativa, es decir, el sentido del campo está dado por el signo de la densidad de carga  $\sigma$ .

En las regiones (I) y (III) exteriores a las placas metálicas, debemos sumar los campos producidos por cada una de las placas. En la región (I) a la izquierda de la Fig. 4.1, se tiene

$$E_{(I)} = E_b + E_a \quad (2.21)$$

donde  $E_b = \frac{\sigma^+}{2\epsilon_0}$ , sale de la placa  $b$  y apunta hacia la izquierda (negativo), y  $E_a = \frac{\sigma^-}{2\epsilon_0}$ ,

llega a la placa  $a$  y apunta hacia la derecha (positivo). Dado que  $|\sigma^+| = |\sigma^-| = \sigma$ , ambos campos tienen igual módulo, pero direcciones exactamente opuestas, por lo tanto la superposición de ambos campos es igual a cero, es decir,

$$E_{(I)} = E_b + E_a = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0 \quad (2.22)$$

Procediendo de igual manera en la región (III), se verifica el mismo resultado. Luego, hemos demostrado que en las regiones exteriores a las placas del condensador de placas paralelas, el módulo del campo eléctrico es cero:

$$E_{(I)} = E_{(III)} = 0 \quad (2.23)$$

Para obtener el campo eléctrico en la región interior del condensador, debemos realizar la misma suma de campos debidos a cada una de las placas. En este caso, el campo eléctrico producido por la placa  $b$  sale de ella y apunta hacia la derecha, a su vez, el campo de la placa  $a$  también apunta hacia la derecha, pero llega a la placa  $a$ . En consecuencia, en esta región ambos campos apuntan en la misma dirección (hacia la derecha), por lo tanto, el campo resultante es:

$$E_{(II)} = E_b + E_a = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.24)$$

valor idéntico al encontrado en el problema 4 para la región interior al condensador.

6.- Hallar el campo eléctrico en función del radio  $r$  para una esfera de carga con una densidad volumétrica de carga  $\rho(r)$  dada por,

$$\rho(r) = \begin{cases} \alpha r^n, & n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \quad \text{si } 0 < r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.25)$$

En la densidad  $\rho(r)$ , para cada valor de  $n$  dado, la constante  $\alpha$  tiene las dimensiones físicas adecuadas para que la dimensión de la densidad de carga sea  $[\rho] = \left[ \frac{C}{m^3} \right]$ .

### **Solución:**

Existen dos regiones de interés para este problema, la región interior a la esfera de carga de radio  $R$ , ( $r \leq R$ ) y la región exterior a dicha esfera ( $r > R$ ). Para cada región de interés debemos usar una Gaussiana distinta.

Región interior ( $r \leq R$ )

La superficie Gaussiana apropiada para este problema es una esfera de radio  $r < R$ , concéntrica con la distribución esférica de carga como lo muestra la Fig. 6.1 con línea punteada.

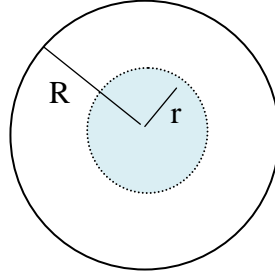


Figura 6.1 Esfera de carga con Gaussiana esférica de radio  $r < R$ .

Como ya vimos en el problema 1, las líneas de campo eléctrico  $\vec{E}$  y las diferenciales de superficie  $d\vec{S}$  sobre la esfera Gaussiana son paralelas, por lo tanto,  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ . Entonces, la ley de Gauss queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E dS = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (2.26)$$

$$E \oint dS = E 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (2.27)$$

despejando se tiene,

$$E = \frac{q_{\text{neta}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.28)$$

donde  $r$  es el radio de la Gaussiana esférica, ya que en dicha superficie estamos calculando el flujo eléctrico. La carga neta  $q_{\text{neta}}$  viene dada por la integral de volumen sobre la densidad volumétrica de carga  $\rho$ , calculando la integral hasta el radio  $r$  de la Gaussiana esférica, ya que la carga que importa para la ley de Gauss es la carga total o neta contenida dentro de la Gaussiana, luego

$$q_{\text{neta}} = \int_0^{r \leq R} \rho dV \quad (2.29)$$

Usando la función  $\rho = \rho(r) = \alpha r^n$ , para esta región, se tiene

$$q_{\text{neta}} = \int_0^{r \leq R} \rho dV = \int_0^{r \leq R} [\alpha r^n] (4\pi r^2 dr) \quad (2.30)$$

$$q_{\text{neta}} = 4\pi\alpha \int_0^{r \leq R} (r^{n+2} dr) \quad (2.31)$$



donde hemos usado que la diferencial de volumen de una esfera viene dada por  $dV_{esfera} = 4\pi r^2 dr$ . Integrando, se obtiene la carga neta contenida dentro de la Gaussiana de radio  $r < R$ ,

$$q_{neta} = 4\pi\alpha \left| \frac{r^{(n+3)}}{(n+3)} \right|_0^r = \frac{4\pi\alpha r^{(n+3)}}{(n+3)} \quad (2.32)$$

Reemplazando este resultado en la relación (2.28), se obtiene,

$$E = \frac{q_{neta}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{4\pi\alpha r^{(n+3)}}{(n+3)} \quad (2.33)$$

simplificando obtenemos el módulo del campo eléctrico

$$E = \frac{\alpha}{\epsilon_0 (n+3)} r^{(n+1)}, \quad r \leq R \quad (2.34)$$

El vector campo eléctrico  $\vec{E}(r \leq R)$  para puntos interiores de la esfera dieléctrica apunta radialmente hacia afuera y viene dado por

$$\vec{E}(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0 (n+3)} r^{(n+1)} \hat{e}_r, \quad r \leq R \quad (2.35)$$

Como caso particular de esta relación podemos obtener el módulo del campo eléctrico justo en la superficie de la esfera de radio  $R$ , haciendo  $r = R$ ,

$$E(r = R) = \frac{\alpha}{\epsilon_0 (n+3)} R^{(n+1)} \quad (2.36)$$

Región exterior ( $r > R$ )

En este caso seguimos usando una Gaussiana esférica concéntrica con la distribución de carga, pero de radio  $r > R$ . Lo importante en este caso es calcular correctamente la carga total contenida dentro de esta nueva Gaussiana,

$$q_{neta} = \int_0^{r>R} \rho dV \quad (2.37)$$

Esta integral se debe separar en dos regiones, una para  $r \leq R$  y otra para  $r > R$ , las cuales tienen distinta densidad de carga  $\rho(r)$ , esto es

$$q_{neta} = \int_0^R \rho(r \leq R) dV + \int_0^{r>R} \rho(r > R) dV \quad (2.38)$$

Para este problema, la densidad volumétrica de carga fuera de la esfera de radio  $R$  vale cero, es decir,  $\rho(r > R) = 0$ , por lo tanto,  $q_{neta}$  dada por (2.38), queda

### 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

$$q_{\text{neta}} = \int_0^R \rho(r \leq R) dV \quad (2.39)$$

En consecuencia, la carga total encerrada en esta nueva Gaussiana es justo la carga total  $Q$  de la esfera dieléctrica

$$q_{\text{neta}} = \frac{4\pi\alpha R^{(n+3)}}{(n+3)} = Q \quad (2.40)$$

Aplicando la ley de Gauss para esta nueva Gaussiana, con  $q_{\text{neta}} = Q$ , se tiene,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.41)$$

despejando, vemos que el campo eléctrico exterior a la esfera de carga es igual al campo eléctrico de una carga puntual:

$$E(r > R) = \frac{kQ}{r^2}, \quad r > R \quad (2.42)$$

Reemplazando  $Q$  dado por ecuación (2.40) y  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , se tiene

$$E(r) = \frac{\alpha R^{(n+3)}}{\epsilon_0 (n+3) r^2}, \quad r > R \quad (2.43)$$

Como caso particular de este resultado podemos obtener el módulo del campo eléctrico justo en la superficie de la esfera dieléctrica de radio  $R$ , haciendo  $r = R$ ,

$$E(r = R) = \frac{\alpha}{\epsilon_0 (n+3)} R^{(n+1)} \quad (2.44)$$

Este resultado coincide con el resultado obtenido para la región  $r \leq R$  en la relación (2.36). Por lo tanto, el módulo del campo eléctrico  $E(r)$  es una función continua en  $r = R$ , y podemos escribir su expresión en todo el espacio como función de  $\alpha$  y del parámetro  $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ :

$$E = \begin{cases} E = \frac{\alpha}{\epsilon_0 (n+3)} r^{(n+1)} & \text{si } r \leq R \\ \frac{\alpha R^{(n+3)}}{\epsilon_0 (n+3) r^2} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.45)$$

Existen varios casos particulares interesantes, como por ejemplo los casos  $n = 0$  (esfera de carga homogénea) y  $n = 1$  (primer caso de esfera de carga inhomogénea). Para el caso homogéneo,  $n = 0$ , se tiene

$$E = \begin{cases} E = \frac{\alpha}{3\epsilon_0} r & \text{si } r \leq R \\ \frac{\alpha R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.46)$$

Para el caso de distribución inhomogénea de carga con  $n=1$ , el módulo del campo eléctrico viene dado por:

$$E = \begin{cases} E = \frac{\alpha}{4\epsilon_0} r^2 & \text{si } r \leq R \\ \frac{\alpha R^4}{4\epsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.47)$$

En cualquier caso, el vector campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  apunta radialmente saliendo del centro de la esfera.

7.- Hallar el campo eléctrico en el punto  $P$  exterior a una esfera de carga de radio  $R$ , con distribución homogénea de carga ( $\rho = \text{cte.}$ ), a la cual le falta un esfera de radio  $a$ , como se muestra en la Fig 7.1.

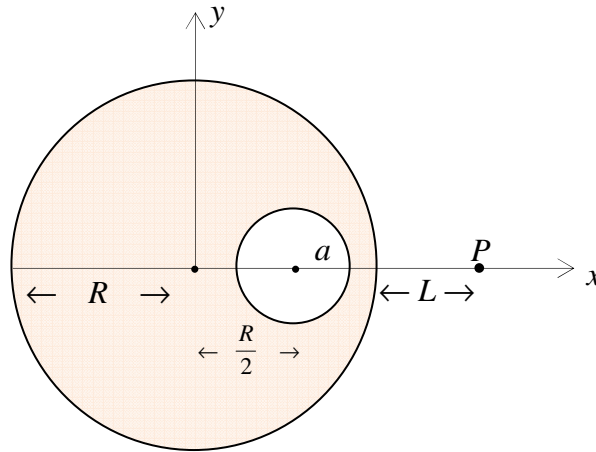


Figura 7.1 Esfera de carga con un agujero esférico.

### Solución:

Este problema se puede resolver usando la ley de Coulomb, pero su cálculo es bastante complicado. Por otra parte, la ley de Gauss no se puede aplicar directamente porque no existe suficiente simetría en la distribución de carga. Sin embargo, usando de manera combinada el Principio de Superposición y la ley de Gauss podemos resolver fácilmente el

### 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

problema. La estrategia consiste en reemplazar la esfera de carga faltante (el agujero), por una esfera de densidad de carga  $(-\rho)$ , luego calcular el campo eléctrico producido por cada una de las esferas de carga y, finalmente, aplicar el principio de superposición. Ver Fig. 7.2.

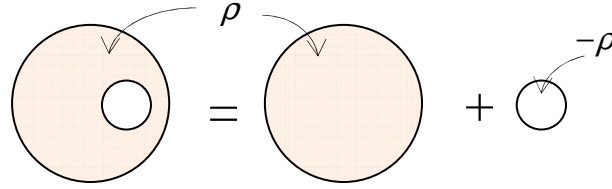


Figura 7.2 Principio de Superposición.

El campo eléctrico resultante en el punto  $P$ , se debe a la superposición de los dos campos generados por a) una esfera de carga de radio  $R$  y densidad volumétrica  $\rho$  ubicada en el origen de coordenadas, y b) una esfera de carga de radio  $a$  y densidad volumétrica  $(-\rho)$  (el agujero esférico), ubicada en la posición  $\left(\frac{R}{2}\right)$  del eje  $x$  como se muestra en la Fig. 7.1

y 7.2. El campo eléctrico resultante  $\vec{E}$  apunta a lo largo del eje  $x$ . Por el Principio de superposición el campo resultante viene dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (2.48)$$

donde  $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\text{esfera grande}}$  es el campo eléctrico en el exterior de la esfera llena de radio  $R$  y densidad  $\rho$ , y donde  $\vec{E}_2 = \vec{E}_{\text{esfera chica}}$  es el campo eléctrico en el exterior de la esfera chica de radio  $a$ , llena con carga de densidad  $(-\rho)$ .

El campo en el exterior de una esfera de carga de radio  $R$  se calculó mediante la ley de Gauss en el problema 6,

$$E(r > R) = \frac{kQ}{r^2} \quad (2.49)$$

donde  $r$  es la distancia desde el centro de dicha esfera hasta el punto  $P$  donde se mide el campo eléctrico y  $Q$  es la carga total contenida en la esfera. Sea  $E_1$  el campo de la esfera de radio  $R$  y densidad de carga  $\rho$ , ubicada en el origen de coordenadas mostrada en Fig.

7.1 y sea  $E_2$  el campo creado por la esfera de radio  $a$  y densidad de carga  $(-\rho)$  ubicada en la posición  $\left(\frac{R}{2}\right)$ .

El módulo del campo  $E_1$  viene dado por

$$E_1 = \frac{kQ_1}{r_1^2} \quad (2.50)$$

donde  $r_1 = (R + L)$  y  $Q_1 = \int \rho dV = \rho \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ . Reemplazando en (2.50), se tiene

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho 4\pi R^3}{3(R + L)^2} \quad (2.51)$$

$$E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{(R + L)^2} \quad (2.52)$$

Este campo apunta en la dirección del eje  $x^+$ , es decir,

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{(R + L)^2} \hat{i} \quad (2.53)$$

El módulo del campo  $E_2$  viene dado por

$$E_2 = \frac{k|Q_2|}{r_2^2} \quad (2.54)$$

donde  $r_2 = \left(\frac{R}{2} + L\right)$  y donde  $|Q_2|$  es el módulo de la carga eléctrica contenida en la esfera

hueca de radio  $a$  y densidad de carga  $(-\rho)$ , es decir,  $|Q_2| = \int (|-\rho|) dV = \frac{4}{3}\pi \rho a^3$ .

Reemplazando en (2.54), se tiene

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi \rho a^3}{3\left(\frac{R}{2} + L\right)^2} \quad (2.55)$$

$$E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{\left(\frac{R}{2} + L\right)^2} \quad (2.56)$$

### 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

El vector campo eléctrico  $\vec{E}_2$  apunta en la dirección negativa del eje  $x$ , porque la densidad de carga es negativa y por lo tanto las líneas de campo eléctrico apuntan en la dirección del centro de la esfera, es decir,

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{\left(\frac{R}{2} + L\right)^2} (-\hat{i}) \quad (2.57)$$

El campo resultante de la superposición  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , viene dado por

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[ \frac{R^3}{(R+L)^2} - \frac{a^3}{\left(\frac{R}{2} + L\right)^2} \right] \hat{i} \quad (2.58)$$

Nótese que el módulo del campo eléctrico resultante  $E$ , es menor que el campo de la esfera llena de radio  $R$ , ya que el agujero de radio  $a$  le quita carga a la esfera y por lo tanto debilita el campo eléctrico resultante.

8.- Calcular el campo eléctrico en el punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  exterior al cascarón esférico de radio interior  $a$  y radio exterior  $R$ , con densidad de carga homogénea  $\rho_0$ , mostrado en la Fig. 8.1.

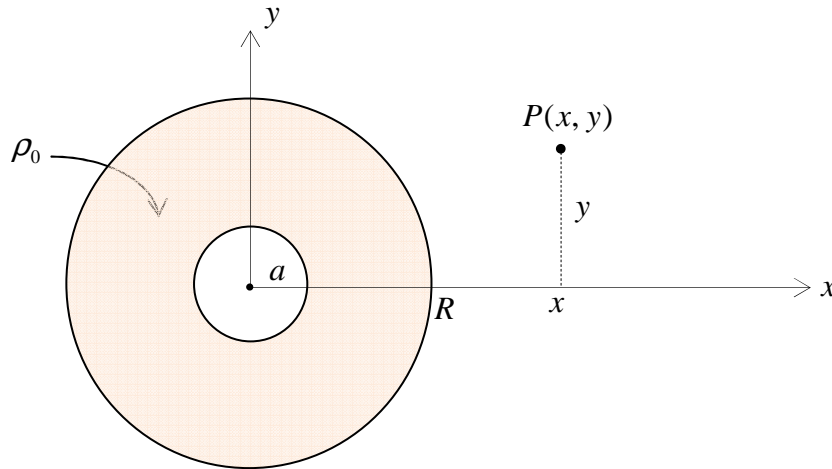


Figura 8.1 Cascarón esférico de carga con densidad constante  $\rho_0$ .

**Solución:**

Usando lo aprendido en el problema 7, vamos a superponer los campos eléctricos creados por cada una de las esferas de carga de forma independiente. La esfera grande tiene densidad  $\rho$  y su campo eléctrico viene dado por  $\vec{E}_1 = E_1 \hat{e}$ . El agujero tiene densidad  $(-\rho)$  y su campo viene dado por  $\vec{E}_2 = E_2 (-\hat{e})$ . El signo negativo aparece porque la densidad de carga se considera negativa. En estas expresiones  $E_1$  y  $E_2$  son módulos de cada campo eléctrico y  $\hat{e}$  es el vector unitario que va del origen del cascarón al punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  fuera del cascarón. La superposición nos da

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (E_1 - E_2) \hat{e} \quad (2.59)$$

El módulo del campo eléctrico fuera de la esfera grande vale

$$\vec{E}_1 = \frac{kQ_1}{r^2} \hat{e} \quad (2.60)$$

donde  $r^2 = (x^2 + y^2)$  y donde la carga neta encerrada  $Q_1$  vale

$$Q_1 = \int_0^R \rho_0 dV = \rho_0 \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) \quad (2.61)$$

reemplazando en (2.60), se tiene

$$\vec{E}_1 = \frac{kQ_1}{r^2} \hat{e} = \frac{4\pi k \rho_0 R^3}{3(x^2 + y^2)} \hat{e} \quad (2.62)$$

usando  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , se obtiene

$$\vec{E}_1 = \frac{kQ_1}{r^2} \hat{e} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0(x^2 + y^2)} \hat{e} \quad (2.63)$$

Para el agujero central de radio  $a$ , considerado como una esfera de carga con densidad  $(-\rho)$ , se tiene,

$$\vec{E}_2 = \frac{kQ_2}{r^2} (-\hat{e}) \quad (2.64)$$

donde  $Q_2$  indica el módulo de la carga. El signo menos del vector unitario  $\hat{e}$  se escribe porque el campo eléctrico vectorial  $\vec{E}_2$  apunta hacia el centro de la esfera hueca, debido a que si densidad de carga es negativa. El módulo de la carga viene dado por

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

$$Q_2 = \int_0^a (\rho_0) dV = \frac{4}{3} \pi \rho_0 a^3 \quad (2.65)$$

reemplazando en (2.60) y usando  $r^2 = (x^2 + y^2)$ , se tiene

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2)} (-\hat{e}) \quad (2.66)$$

Reemplazando (2.63) y (2.66) en (2.59), obtenemos el campo eléctrico resultante del cascarón esférico,

$$\vec{E} = \left( \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2)} - \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \right) \hat{e} \quad (2.67)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2)} (R^3 - a^3) \hat{e} \quad (2.68)$$

Nos falta calcular el vector unitario  $\hat{e} = \frac{\vec{r}}{r}$  que va del origen hasta el punto  $P$ . Para este

caso  $\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j})$  y su módulo  $r$  vale  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , luego

$$\hat{e} = \frac{(x\hat{i} + y\hat{j})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.69)$$

Reemplazando en (2.68), tenemos el vector campo eléctrico resultante de la superposición,

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 (R^3 - a^3)}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} (x\hat{i} + y\hat{j}) \quad (2.70)$$

Caso particular a) Si  $a \rightarrow R$ , es decir, el cascarón se hace extremadamente delgado, entonces  $(R^3 - a^3) \rightarrow 0$ , lo cual implica que el campo resultante vale cero,  $\vec{E} = \vec{0}$ . Esto ocurre porque entonces el cascarón prácticamente no tendría carga.

Caso particular b) Si  $a \rightarrow 0$ , es decir, si no hay agujero interior, entonces tenemos una

única esfera llena de carga y el campo vale  $\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} (x\hat{i} + y\hat{j}) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \vec{r}$ . Es

decir, obtenemos el mismo resultado que el campo de una carga puntual  $\vec{E} = \frac{kQ}{r^3} \vec{r}$ .



Consideremos ahora la solución de este problema usando la ley de Gauss, pero sin usar la superposición de los campos de dos esferas.

Dada la simetría del problema, para calcular el campo eléctrico en puntos exteriores al cascarón de carga podemos usar una única Gaussiana de radio  $r > R$ . La ley de Gauss viene dada por

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (2.71)$$

Sabemos que  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son paralelos sobre la superficie Gaussiana y sabemos que el módulo  $E$  del campo eléctrico es constante sobre cualquier punto de la superficie de la esfera Gaussiana de radio fijo  $r > R$ . La ley de Gauss queda

$$E \oint dS = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (2.72)$$

La superficie de la esfera vale  $\oint dS = 4\pi r^2$ , por lo tanto, el módulo  $E$  viene dado por

$$E = \frac{q_{\text{neta}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.73)$$

Usando la Fig. 8.1, el radio de la Gaussiana vale  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Matemáticamente, la densidad de carga  $\rho(r)$  de este cascarón viene dada por

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \rho_0 & \text{si } a < r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.74)$$

Ahora podemos calcular la carga neta encerrada dentro de la Gaussiana

$$q_{\text{neta}} = \int_{r=0}^{r>R} \rho(\vec{r}') dV = \int_{r=0}^{r=a} \rho(\vec{r}') dV + \int_{r=a}^{r=R} \rho(\vec{r}') dV + \int_{r=R}^{r>R} \rho(\vec{r}') dV \quad (2.75)$$

Dado que  $\rho(r)$  es distinta de cero sólo en el cascarón esférico ( $a < r < R$ ), la relación (2.75) queda

$$q_{\text{neta}} = \int_{r=a}^R \rho(\vec{r}') dV \quad (2.76)$$

usando  $\rho(\vec{r}') = \rho_0$  y  $dV = 4\pi r'^2 dr'$ , se tiene

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

$$q_{neta} = \int_{r=a}^R \rho_0 4\pi r'^2 dr' = 4\pi\rho_0 \int_{r=a}^R r'^2 dr' \quad (2.77)$$

Finalmente, la carga total almacenada dentro de la Gaussiana vale

$$q_{neta} = 4\pi\rho_0 \left[ \frac{r^3}{3} \right]_a^R = \frac{4\pi\rho_0}{3} (R^3 - a^3) \quad (2.78)$$

Insertando este resultado en la relación (2.73), se tiene

$$E = \frac{4\pi\rho_0}{4\pi 3\epsilon_0 r^2} (R^3 - a^3) \quad (2.79)$$

simplificando obtenemos,

$$E = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} (R^3 - a^3) \quad (2.80)$$

Si reemplazamos el valor fijo  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , obtenemos el módulo del campo eléctrico resultante

$$E = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2)} (R^3 - a^3) \quad (2.81)$$

Resultado idéntico al obtenido en relación (2.68), usando el método de superposición de dos esferas de distinta densidad de carga vista más arriba. Usando el vector unitario

$$\hat{e} = \frac{(x\hat{i} + y\hat{j})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.82)$$

el campo eléctrico vectorial en el punto  $P$  viene dado por

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 (R^3 - a^3)}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} (x\hat{i} + y\hat{j}) \quad (2.83)$$

resultado que coincide con (2.70).

9.- Calcular el módulo del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  y el potencial electrostático  $V(\vec{r})$  en función de la distancia radial  $r$ , creados por un cilindro *muy largo*, con densidad volumétrica de carga  $\rho(r)$ , como se indica en la Fig. 9.1.

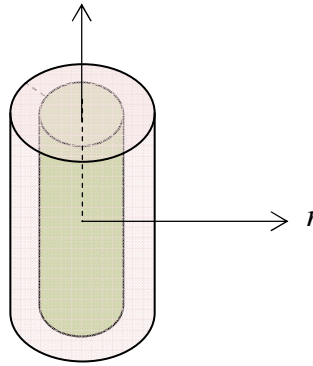


Figura 9.1 Cilindro de carga con densidad volumétrica variable.

Explícitamente, la densidad volumétrica de carga  $\rho(r)$  viene dada por

$$\rho(r) = \begin{cases} \alpha r & \text{si } 0 < r < a \\ \frac{\beta}{r} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases} \quad (2.84)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes.

### Solución.

Cálculo del módulo del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ .

La Fig. 9.2 muestra la relación entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y las diferenciales de superficie  $d\vec{S}$  en las tapas y en el manto cilíndrico de la Gaussiana.

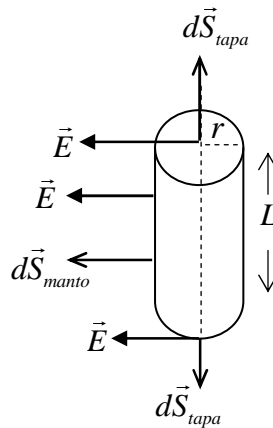


Figura 9.2 Relación entre los vectores campo eléctrico  $\vec{E}$  y las diferenciales de superficie  $d\vec{S}$ .

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

Primero calcularemos el módulo del campo eléctrico  $\vec{E}$  en cada región, partiendo desde las regiones interiores a las exteriores. Recordemos que la superficie del manto cilíndrico vale  $S_{manto} = 2\pi rL$  y que la diferencial de volumen del cilindro vale  $dV_c = 2\pi Lrdr$ . La ley de Gauss para el cilindro queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{tapa1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{tapa2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{manto} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{manto} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \quad (2.85)$$

En las tapas del cilindro Gaussiano, el campo eléctrico  $\vec{E}$  y la diferencial de superficie  $d\vec{S}_{tapas}$  son perpendiculares entre sí, y por lo tanto, el producto punto se anula  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{tapas} = E dS_{tapas} \cos 90^\circ = 0$ . En consecuencia, no hay contribución de las tapas a la integral del flujo eléctrico. Por lo tanto, sólo tenemos que calcular de la integral sobre el manto cilíndrico, esto es,

$$\int_{manto} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{manto} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \quad (2.86)$$

En el manto, el campo eléctrico y la diferencial de superficie son paralelos, luego  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{manto} = E dS_{manto}$ . Además, el módulo del campo eléctrico  $E$  vale lo mismo en todos los puntos del manto cilíndrico, por lo tanto,  $E$  se puede sacar de la integral y se obtiene

$$E S_{manto} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \quad (2.87)$$

Usando el valor  $S_{manto} = 2\pi rL$ , se escribe

$$E 2\pi rL = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \quad (2.88)$$

La carga neta encerrada por la Gaussiana viene dada por

$$q_{neta} = \int \rho(r) dV \quad (2.89)$$

Usando  $dV_c = 2\pi Lrdr$ , tenemos,

$$E 2\pi rL = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r) 2\pi Lrdr \quad (2.90)$$

donde el límite superior indica el radio de la Gaussiana cilíndrica. Simplificando por  $2\pi L$ , se obtiene

$$Er = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r) r dr \quad (2.91)$$

Esta es la expresión que emplearemos para calcular el campo en todas las regiones.

Región 1: para  $r$  en la región  $0 < r < a$ .

En esta región la densidad vale  $\rho(r) = (\alpha r)$ . Usando la relación (2.87), se tiene

$$E_1 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r (\alpha r) r dr \quad (2.92)$$

integrando, obtenemos el módulo del campo eléctrico

$$E_1 = \frac{\alpha}{3\epsilon_0} r^2 \quad (2.93)$$

El campo vectorial en la región  $0 < r < a$ , viene dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{\alpha r^2}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad (2.94)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario radial, perpendicular al eje del cilindro.

Región 2: para  $r$  en la región  $a < r < b$ .

En esta región la densidad vale  $\rho(r) = \left(\frac{\beta}{r}\right)$ . Usando relación (2.87), se tiene

$$E_2 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{a < r < b} \rho(r) r dr \quad (2.95)$$

La integral sobre la carga neta encerrada en la Gaussiana de radio  $a < r < b$ , se separa en dos partes,

$$\int_0^{a < r < b} \rho(r) r dr = \int_0^a \rho(r) r dr + \int_a^{a < r < b} \rho(r) r dr \quad (2.96)$$

Usando esta relación y reemplazando los valores de la densidad de carga en cada región, la relación (2.95) viene dada por,

$$E_2 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a (\alpha r) r dr + \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^{a < r < b} \left(\frac{\beta}{r}\right) r dr \quad (2.97)$$

Simplificando e integrando, obtenemos el módulo del campo eléctrico en la región  $a < r < b$

$$E_2 = \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(r - a)) \quad (2.98)$$

Finalmente, el campo eléctrico vectorial en la región 2 vale

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(r-a)) \hat{r} \quad (2.99)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario radial, perpendicular al eje del cilindro.

Región 3: para  $r$  en la región  $r > b$ .

En esta región la densidad vale  $\rho(r) = 0$ . Usando relación (2.87), se tiene

$$E_3 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r>b} \rho(r) r dr = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \int_0^a \rho(r) r dr + \int_a^b \rho(r) r dr + \int_b^{r>b} \rho(r) r dr \right) \quad (2.100)$$

La integral sobre la densidad de carga se separa en tres regiones

$$\int_0^{r>b} \rho(r) r dr = \int_0^a \rho(r) r dr + \int_a^b \rho(r) r dr + \int_b^{r>b} \rho(r) r dr \quad (2.101)$$

Aplicando los valores de las densidades de carga en cada región, se obtiene

$$\int_0^{r>b} \rho(r) r dr = \int_0^a (\alpha r) r dr + \int_a^b \left( \frac{\beta}{r} \right) r dr + \int_b^{r>b} (0) r dr \quad (2.102)$$

$$\int_0^{r>b} \rho(r) r dr = \int_0^a (\alpha r) r dr + \int_a^b \left( \frac{\beta}{r} \right) r dr \quad (2.103)$$

Reemplazando en (2.100), se tiene

$$E_3 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a (\alpha r) r dr + \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^b \left( \frac{\beta}{r} \right) r dr \quad (2.104)$$

Integrando se obtiene el módulo del campo eléctrico en la región  $r > b$

$$E_3 = \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(b-a)) \quad (2.105)$$

El vector campo eléctrico en la región 3,  $r > b$ , viene dado por

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(b-a)) \hat{r} \quad (2.106)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario radial, perpendicular al eje del cilindro.

Cálculo del potencial electrostático  $V(\vec{r})$ .

Para el cálculo del potencial no usaremos el punto de referencia en  $r_{ref} = r \rightarrow \infty$ , porque allí no se anula el potencial para este tipo de simetría cilíndrica. En cambio, debemos usar como punto de referencia un valor arbitrario en las cercanías del cilindro de valor  $r_{ref} = r_0$ .

El potencial electrostático en un punto viene dado por

$$V(\vec{r}) = - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.107)$$

donde el potencial en el punto  $r_0$  vale cero, es decir,  $V(r_0) = 0$ . En todas las regiones, se

cumple que,  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edl$ , pero además  $dl = -dr$ , por lo tanto,  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edr$ .

Calcularemos el potencial viniendo desde la región 3, exterior al cilindro, hasta la región 1, interior al cilindro, a lo largo de la línea radial.

Región 3: para  $r$  en la región  $r > b$ .

$$V(r > b) = - \int_{r_0}^{r>b} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = - \int_{r_0}^{r>b} E_3 dr \quad (2.108)$$

Reemplazando  $E_3$  dado por (2.105), se tiene,

$$V(r > b) = - \int_{r_0}^{r>b} \frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0 r} dr \quad (2.109)$$

$$V(r > b) = - \frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0} \int_{r_0}^{r>b} \frac{dr}{r} \quad (2.110)$$

Finalmente, el potencial  $V(r > b)$  en la región 3 exterior al cilindro viene dado por,

$$V(r > b) = - \frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (2.111)$$

Justo en el punto  $r = b$ , el potencial vale

$$V_b = V(r = b) = - \frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r_0}\right) \quad (2.112)$$

Región 2: para  $r$  en la región  $a < r < b$ .

$$V(a < r < b) = - \int_{r_0}^{a<r<b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_0}^b E_3 dr - \int_b^{a<r<b} E_2 dr \quad (2.113)$$

La primera integral corresponde al potencial dada por relación (2.111), pero evaluado en  $r = b$ , es decir, es justo  $V_b$  dado por (2.112),

$$V(a < r < b) = V_b - \int_b^{a<r<b} E_2 dr \quad (2.114)$$

Reemplazando el módulo del campo  $E_2$  dado por relación (2.98), se obtiene

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

$$V(a < r < b) = V_b - \int_b^{a < r < b} \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(r-a)) dr \quad (2.115)$$

Calculemos la integral restante

$$I = \int_b^{a < r < b} \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(r-a)) dr = \int_b^{a < r < b} \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0 r} dr + \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_b^{a < r < b} \frac{(r-a) dr}{r} \quad (2.116)$$

$$I = \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} \int_b^{a < r < b} \frac{dr}{r} + \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_b^{a < r < b} dr - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \int_b^{a < r < b} \frac{dr}{r} \quad (2.117)$$

$$I = \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{\beta}{\epsilon_0} (r-b) - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \quad (2.118)$$

$$I = \left( \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \right) \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{\beta}{\epsilon_0} (r-b) \quad (2.119)$$

Reemplazando esta integral en la relación (2.115), se tiene

$$V(a < r < b) = V_b - \left( \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \right) \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{\beta}{\epsilon_0} (r-b) \quad (2.120)$$

Si hacemos  $r = b$  se obtiene el mismo potencial  $V_b$  obtenido usando los resultados de la región 3, es decir, el potencial es continuo en el punto  $r = b$ . Si hacemos  $r = a$  en la relación (2.120), se obtiene el potencial  $V(r = a) = V_a$

$$V_a = V(r = a) = -\frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r_0}\right) - \left( \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \right) \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{\beta}{\epsilon_0} (a-b) \quad (2.121)$$

Región 1: para  $r$  en la región  $0 < r < a$ .

$$V(0 < r < a) = - \int_{r_0}^{0 < r < a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_0}^b E_3 dr - \int_b^a E_2 dr - \int_a^{0 < r < a} E_1 dr \quad (2.122)$$

Los dos primeros términos del lado derecho corresponden justo al valor del potencial  $V_a$  en el punto  $r = a$ . Por simplicidad de notación lo dejaremos así expresado.

$$V(0 < r < a) = V_a - \int_a^{0 < r < a} E_1 dr \quad (2.123)$$

Usando el módulo  $E_1$  dado por la relación (2.93), la relación (2.123), queda

$$V(0 < r < a) = V_a - \frac{\alpha}{3\epsilon_0} \int_a^{0 < r < a} r^2 dr \quad (2.124)$$



$$V(0 < r < a) = V_a - \frac{\alpha(r^3 - a^3)}{9\epsilon_0} \quad (2.125)$$

Si  $r = a$  se obtiene  $V_a$ , lo cual prueba que el potencial es continuo en el punto  $r = a$ .

Si  $r = 0$  se obtiene el potencial en el origen del sistema de cilindros  $V_0 = V_a + \frac{\alpha a^3}{9\epsilon_0}$ .

10.- Hallar el módulo del campo eléctrico  $E(r)$  y el potencial electrostático  $V(r)$  en función de la distancia radial  $r$ , en cada una de las regiones, para la configuración formada por una esfera central de radio  $a$  con distribución de carga radialmente simétrica dada por

$\rho = \frac{\beta}{r}$  para  $0 < r \leq a$  con  $\beta = cte.$ , rodeada por un cascarón metálico entre  $r = a$  y  $r = b$

que lleva una carga  $Q = -\pi\alpha a^2$  en su superficie (ver Fig. 10.1).

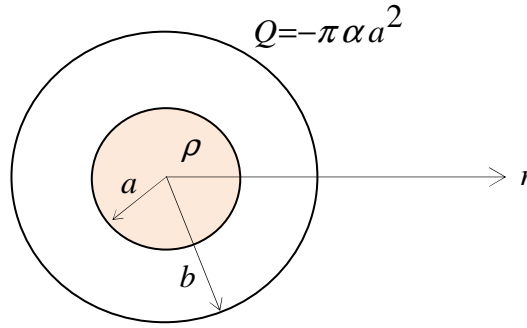


Figura 10.1 Distribución esférica de carga rodeada por un cascarón metálico cargado.

### Solución:

Cálculo del campo eléctrico.

Se usará la ley de Gauss  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$ , para calcular el campo en cada región

Región I:  $0 < r \leq a$

Se usa una Gaussiana de radio  $r \leq a$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \quad (2.126)$$

Dado que sobre la esfera Gaussiana  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son paralelos, se cumple que  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ . Además, el módulo  $E$  es constante sobre la esfera Gaussiana, por lo tanto, sale fuera de la

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

integral, y por lo tanto se cumple que  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES$ . La superficie de la esfera Gaussiana vale  $S = 4\pi r^2$ , luego (2.126) queda

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r \leq a} \rho(r) dV \quad (2.127)$$

Pero, la densidad volumétrica de carga depende de la distancia radial:  $\rho = \frac{\beta}{r}$  para  $0 < r \leq a$  con  $\beta = cte$ . Reemplazando en la integral y recordando que la diferencial de volumen de la esfera viene dada por  $dV = 4\pi r^2 dr$ , podemos escribir:

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r \leq a} \frac{\beta}{r} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\beta r^2}{2\epsilon_0} \quad (2.128)$$

Simplificando se tiene finalmente el módulo  $E_1$  del campo eléctrico en la región I,

$$E_1 = \frac{\beta}{2\epsilon_0} \quad (2.129)$$

Región II:  $a \leq r \leq b$  (dentro del cascarón metálico)

Se usa Gaussiana de radio  $a \leq r \leq b$ . En este caso sabemos que el módulo del campo eléctrico estático es cero en el interior de un conductor, por lo tanto,

$$E_2 = 0 \quad (2.130)$$

Es importante recordar que se produce inducción de cargas en el metal de modo que el campo en el interior es cero, es decir, de la ley de Gauss se infiere que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{neta} = 0, \text{ es decir, la carga neta encerrada en la Gaussiana debe ser cero,}$$

por lo que debe haber carga inducida  $Q_{ind}$  en la superficie interior del conductor, tal que la suma con la carga total interior  $q_{int}$  encerrada en la esfera de radio  $r = a$  debe ser cero:  $q_{int} + Q_{ind} = 0$ . Vemos así que la carga inducida tiene la misma magnitud que la carga total

interior  $q_{int}$  de la esfera de radio  $r = a$ , a saber,  $Q_{ind} = -q_{int} = -\int_0^a \frac{\beta}{r} 4\pi r^2 dr$ . Finalmente, la

carga total  $q_{int}$  en la esfera interior de radio  $r = a$  vale

$$q_{int} = 2\pi\beta a^2 \quad (2.131)$$

y la carga inducida en el metal vale

$$Q_{ind} = -2\pi\beta a^2 \quad (2.132)$$

Naturalmente que en la superficie exterior del metal aparece también la misma cantidad de carga inducida pero de signo opuesto, de modo tal que la suma de toda la carga inducida en el metal es cero.

Región III:  $r > b$

Se usa Gaussiana de radio  $r > b$

Debemos recordar que el sistema de esferas tiene dos tipos de cargas libres: la carga en la esfera interior recién calculada,  $q_{\text{int}} = 2\pi\beta a^2$ , y la carga libre en la superficie exterior del metal  $q_e = -\pi\alpha a^2$ , de modo que la carga total encerrada en la Gaussiana de  $r > b$ , viene dada por

$$q_{\text{neta encerrada}} = q_{\text{int}} + q_e = 2\pi\beta a^2 - \pi\alpha a^2 = \pi a^2 (2\beta - \alpha) \quad (2.133)$$

Ahora aplicamos la ley de Gauss

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{neta encerrada}}}{\epsilon_0} = \frac{\pi a^2 (2\beta - \alpha)}{\epsilon_0} \quad (2.134)$$

Finalmente, el módulo del campo fuera de las esferas viene dado por

$$E_3 = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} \quad (2.135)$$

Cálculo del potencial electrostático  $V(r)$ .

Calcularemos el potencial como función de la distancia radial  $r$  usando la relación

$$V(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.136)$$

Comenzaremos desde la región III hasta la región I. En este caso  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  son antiparalelos, es decir,  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edl$ . Pero,  $dl = -dr$ , luego,  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edr$ .

Región III:  $r > b$

En esta región el módulo del campo eléctrico vale  $E_3 = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$ , por lo tanto, la

integral queda

$$V_3(r) = -\int_{\infty}^{r>b} E_3 dr = -\int_{\infty}^{r>b} \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} dr \quad (2.137)$$

## 2.2.4 Unidad II: Problemas Resueltos

Integrando, se obtiene

$$V_3(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r} \quad (2.138)$$

Región II:  $a \leq r \leq b$

En esta región la integral para calcular el potencial se debe separar en dos porque la integral atraviesa dos regiones distintas

$$V_{III}(r) = - \int_{\infty}^{a < r < b} E dr = - \int_{\infty}^b E_{III} dr - \int_b^{a < r < b} E_{II} dr \quad (2.139)$$

Los módulos de los campos en cada región son:  $E_3 = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$  y  $E_2 = 0$ . Reemplazando

en la integral anterior, tenemos

$$V_{II}(r) = - \int_{\infty}^b \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} dr - \int_b^{a < r < b} 0 dr = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} \quad (2.140)$$

Finalmente,

$$V_2(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} \quad (2.141)$$

Vemos así que el potencial en el interior del metal es constante, es decir, *el conductor en estado estático siempre es un volumen equipotencial*.

Región I:  $0 < r \leq a$

La integral del potencial se escribe

$$V_1(r) = - \int_{\infty}^{r < a} E dr = - \int_{\infty}^b E_3 dr - \int_b^a E_2 dr - \int_a^{r < a} E_1 dr \quad (2.142)$$

Los módulos de los campos en cada región son:  $E_3 = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$ ,  $E_2 = 0$  y  $E_1 = \frac{\beta}{2\epsilon_0}$ ,

respectivamente, luego la integral queda

$$V_1(r) = - \int_{\infty}^b E_3 dr - \int_a^{r < a} E_1 dr \quad (2.143)$$

Reemplazando los campos

$$V_I(r) = -\int_{\infty}^b \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^{r < a} \frac{\beta}{2\epsilon_0} dr \quad (2.144)$$

Integrando se tiene el potencial en la región I

$$V_I(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} - \frac{\beta}{2\epsilon_0}(r - a) \quad (2.145)$$

En resumen, el potencial como función de  $r$  en cada región queda

$$V(r) = \begin{cases} V_I(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} - \frac{\beta}{2\epsilon_0}(r - a) & 0 < r \leq a & \text{región I} \\ V_{II}(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} & a \leq r \leq b & \text{región II} \\ V_{III}(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r} & r \geq b & \text{región III} \end{cases} \quad (2.146)$$



### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

En esta unidad se estudian los condensadores, las resistencias eléctricas y los circuitos eléctricos por los cuales circula la corriente eléctrica. Al mismo tiempo se demuestra la existencia de campos eléctricos no-conservativos que son capaces de establecer una corriente eléctrica estacionaria. Se estudian además las leyes que permiten determinar el valor de la corriente eléctrica a través de cada resistencia en diferentes tipos de circuitos.

#### Equation Section 3

##### 1.- Capacitancia y Condensadores

Se denomina Condensador a un sistema formado por dos conductores de formas arbitrarias, aislados entre sí, con cargas  $Q^+$  y  $Q^-$ , respectivamente, tal como se muestra en la Fig. 3.1. Entre las "placas" se produce una diferencia de potencial  $\Delta V$ .

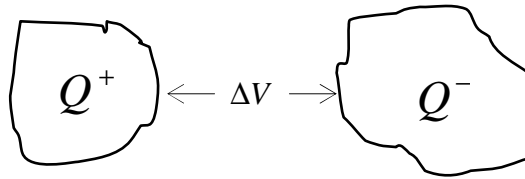


Figura 3.1 Condensador formado por dos objetos metálicos con igual carga, pero de distinto signo.

La Capacitancia  $C$  de un condensador cualquiera se define como el cociente entre la cantidad de carga de uno de los conductores y la diferencia de potencial  $\Delta V$  que se produce entre las placas,

$$C \equiv \left| \frac{Q}{\Delta V} \right| \quad (3.1)$$

Escribimos la definición en valor absoluto porque la capacitancia es una magnitud positiva. La unidad de medida de la capacitancia en el Sistema internacional de Unidades viene dada por  $\left[ \frac{C}{V} \right] = [F]$ , donde  $[C]$  es la unidad de carga eléctrica en Coulomb,  $[V]$  es la unidad de medida de la diferencia de potencial en Volt, y donde  $[F]$  es la unidad de medida de capacitancia en Farad.

## 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

### 2.- Condensador de placas paralelas.

Consideremos como ejemplo del cálculo de la capacitancia de un condensador, el condensador de placas paralelas. Este condensador está formado por dos placas metálicas planas separadas una distancia  $d$ , cada una de ellas con carga  $Q^+$  y  $Q^-$ , respectivamente entre las cuales se produce una diferencia de potencial  $\Delta V$ . En la Fig. 3.2 se indica la densidad superficial de carga  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$  de cada placa y se indica la dirección del campo eléctrico al interior del condensador.

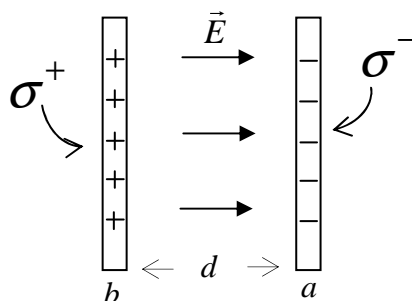


Figura 3.2 Condensador de placas paralelas.

En el Ejemplo 4 del capítulo 2, usando la ley de Gauss, se demostró que el campo eléctrico fuera de las placas del condensador vale cero,  $\vec{E}_{\text{externo}} = \vec{0}$ , y también se demostró que el campo eléctrico entre medio de las placas es constante y viene dado por

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \quad (3.2)$$

Calculemos ahora la diferencia de potencial entre las placas  $\Delta V_{ab} = V_b - V_a$

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.3)$$

Según la Fig. 3.2 el campo  $\vec{E}$  y el vector  $d\vec{l}$  son opuestos, ya que  $d\vec{l}$  apunta desde la placa  $a$  hacia la placa  $b$ , y el campo  $\vec{E}$  apunta hacia la derecha. Por lo tanto,  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dl$ , luego (3.3) queda:

$$\Delta V_{ab} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E dl = Ed \quad (3.4)$$

reemplazando  $E$  dado por (3.2), se tiene finalmente



$$\Delta V_{ab} = \frac{Q}{A\epsilon_0} d \quad (3.5)$$

Dividiendo  $Q$  por  $\Delta V_{ab}$  se obtiene la capacitancia  $C$  del condensador de placas paralelas

$$C_{\text{placas planas}} = \frac{Q}{\Delta V_{ab}} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (3.6)$$

Como se puede ver, la capacitancia  $C$  del condensador de placas paralelas depende sólo de los factores geométricos:  $A$  (área de las placas) y  $d$  (distancia de separación entre placas), y además depende de las propiedades eléctricas del medio dieléctrico que existe entre las placas. En este caso tenemos aire entre las placas. Por eso usamos  $\epsilon_0$ , ya que la permitividad eléctrica del aire es prácticamente igual a la permitividad eléctrica del vacío

$\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \left[ \frac{C^2}{Nm^2} \right]$ . Si entre las placas del condensador usamos otros materiales dieléctricos distintos del aire, se usan los valores experimentales de la permitividad eléctrica  $\epsilon$  del dieléctrico correspondiente, que se expresa a través de la constante dieléctrica  $k$  de cada material, en la forma,  $\epsilon = k\epsilon_0$ .

### 3.- Condensador esférico

La Fig. 3.3 muestra un condensador esférico.

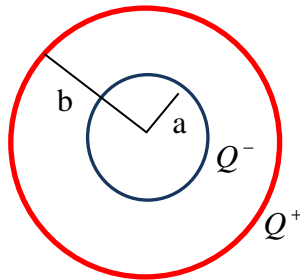


Figura 3.3 Condensador esférico.

Este condensador está formado por una esfera metálica de radio interior  $a$  y un cascarón metálico muy delgado de radio exterior  $b$ , como se muestra en la Fig. 3.3. La esfera interior tiene carga  $Q^-$  y la esfera exterior tiene carga  $Q^+$ . Recordemos que *en los metales las cargas libres se distribuyen sólo en la superficie exterior del conductor*.

### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

Para calcular la capacitancia del condensador esférico se necesita calcular la diferencia de potencial entre las placas  $\Delta V_{ab} = V_b - V_a$  donde siempre restamos el potencial creado por el conductor con carga positiva, menos el potencial creado por el conductor cargado negativamente. Para calcular la diferencia de potencial según la definición (3.3) se necesita conocer el campo eléctrico entre las esferas. Sabemos por ley de Gauss que el campo eléctrico entre las placas viene dado por la expresión

$$E = \frac{kQ}{r^2}, \quad a < r < b \quad (3.7)$$

y que apunta radialmente desde la esfera exterior positiva hasta la esfera interior negativa. Además sabemos que el vector  $d\vec{l}$  apunta radialmente hacia afuera, es decir,  $d\vec{l} = d\vec{r}$ , ya que para calcular  $\Delta V_{ab} = V_b - V_a$  debemos viajar de la placa negativa (esfera interior) hasta la positiva (esfera exterior) por cualquier camino. Dado que la diferencia de potencial es independiente de la trayectoria seguida entre dos puntos, elegiremos la trayectoria radial. Entonces, se cumple que  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dl = -E dr$ . Luego  $\Delta V_{ab}$  queda:

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E dl = \int_a^b E dr \quad (3.8)$$

ya que en este caso,  $dl = dr$ . Reemplazando  $E = \frac{kQ}{r^2}$  en la integral nos queda

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = \int_a^b \left( \frac{kQ}{r^2} \right) dr = -\frac{kQ}{r} \Big|_a^b = kQ \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad (3.9)$$

en forma abreviada nos queda

$$\Delta V_{ab} = \frac{kQ(b-a)}{ab} \quad (3.10)$$

La capacitancia  $C = \frac{Q}{\Delta V_{ab}}$  del condensador esférico viene dado por:

$$C = \frac{Q}{\Delta V_{ab}} = \frac{Qab}{kQ(b-a)} = \frac{ab}{k(b-a)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a)} \quad (3.11)$$

$$C_{\text{esférico}} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a)} \quad (3.12)$$

Nuevamente vemos que la capacitancia de un condensador depende sólo de factores geométricos: los radios  $a$  y  $b$ , y depende de las propiedades dieléctricas del material que

existe entre las placas del condensador esférico. En este ejemplo seguimos usando aire, por eso usamos  $\epsilon_0$ .

Los condensadores se pueden conectar de variadas formas, entre las más sencillas se encuentran las conexiones en serie y en paralelo.

#### 4.- Condensadores conectados en serie.

Cuando se conectan en serie dos o más condensadores de capacitancia  $C_j$ , cada uno de los condensadores adquiere la misma carga  $Q_j = Q$ ,  $\forall j$ , pero sus diferencias de potencial  $\Delta V_j$ , son diferentes.

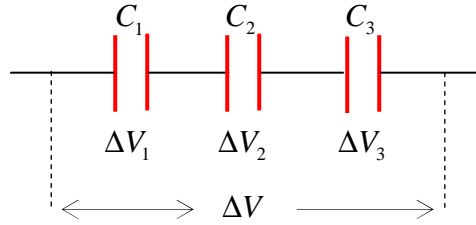


Figura 3.4 Condensadores conectados en serie.

La Fig. 3.4 muestra que la diferencia de potencial entre los extremos de la conexión en serie  $\Delta V$  es igual a la suma de las diferencias de potencial  $\Delta V_j$  a través de cada condensador, es decir,

$$\Delta V = \sum_{j=1}^N \Delta V_j \quad (3.13)$$

pero de la definición de capacitancia de cada condensador se tiene que

$$C_j = \frac{Q_j}{\Delta V_j} \quad (3.14)$$

dado que  $Q_j = Q$  en cada condensador, se tiene que  $\Delta V_j = \frac{Q_j}{C_j} = \frac{Q}{C_j}$ . Reemplazando en la relación (3.13), se tiene que

$$\Delta V = \sum_{j=1}^N \Delta V_j = \sum_{j=1}^N \frac{Q}{C_j} = Q \sum_{j=1}^N \frac{1}{C_j} \quad (3.15)$$

### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

dividiendo por  $Q$ , se obtiene

$$\frac{\Delta V}{Q} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{C_j} \quad (3.16)$$

Esta expresión es justamente el inverso de la capacitancia equivalente en serie,  $C^{(\text{serie})}$ ,

$$\frac{\Delta V}{Q} = \frac{1}{C^{(\text{serie})}} \quad (3.17)$$

usando (3.16), se obtiene el inverso de la capacitancia en serie

$$\frac{1}{C^{(\text{serie})}} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{C_j} \quad (3.18)$$

Esta expresión indica que el inverso de la capacitancia total de la conexión en serie, es la suma de los inversos de cada capacitancia individual. Nótese que la capacitancia equivalente en serie,  $C^{(\text{serie})}$ , es siempre menor que cualquiera de las capacitancias individuales.

#### 5.- Condensadores conectados en paralelo

Cuando se conectan en paralelo dos o más condensadores  $C_j$ , la diferencia de potencial en cada uno de ellos es la misma, es decir,  $\Delta V_j = \Delta V$ ,  $\forall j$ , pero las cargas  $Q_j$  son distintas. La Fig. 3.5 muestra la conexión en paralelo.

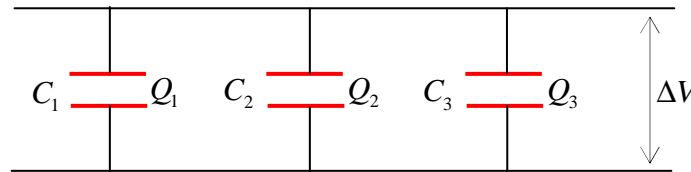


Figura 3.5 Condensadores conectados en paralelo.

En este caso, la carga total  $Q$  a través del sistema viene dada por la suma de todas y cada una de las cargas contenidas en una de las placas de cada condensador,

$$Q = \sum_{j=1}^N Q_j \quad (3.19)$$

Usando la definición de capacitancia, la carga  $Q_j$  se puede expresar como  $Q_j = C_j \Delta V_j$ , pero dado que la diferencia de potencial  $\Delta V_j$  es la misma para todos los condensadores conectados en paralelo  $\Delta V_j = \Delta V$ ,  $\forall j$ , se tiene  $Q_j = C_j \Delta V$ . Reemplazando en la expresión (3.19), se tiene:

$$Q = \sum_{j=1}^N Q_j = \sum_{j=1}^N C_j \Delta V \quad (3.20)$$

Dividiendo por  $\Delta V$ , la capacitancia total viene dada entonces por la siguiente expresión

$$C^{(\text{paral})} = \frac{Q}{\Delta V} = \sum_{j=1}^N C_j \quad (3.21)$$

$$C^{(\text{paral})} = \sum_{j=1}^N C_j \quad (3.22)$$

En consecuencia, la capacitancia equivalente a la conexión en paralelo,  $C^{(\text{paral})}$ , es igual a la suma de las capacitancias de todos los condensadores individuales, y su valor,  $C^{(\text{paral})}$ , es siempre mayor que cualquiera de las capacitancias individuales.

## 6.- Energía almacenada en el condensador

Para cargar un condensador es necesario realizar un trabajo para llevar las cargas desde el infinito hasta sus placas, siempre que ya tengan a lo menos un infinitésimo de carga. Consideremos un condensador de capacitancia  $C$  que tiene una carga  $q$ . La diferencia de potencial  $\Delta V$  en el condensador viene dada por  $\Delta V = \frac{q}{C}$ . Si ahora añadimos una cantidad infinitesimal de carga  $dq$  trayéndola desde infinito hasta las placas del condensador, el trabajo diferencial  $dW$  realizado para traer la carga viene dado por

$$dW = \Delta V dq \quad (3.23)$$

Pero este trabajo diferencial es justamente el aumento diferencial de energía,  $d\mathcal{E}$ , del condensador, por lo tanto se cumple que

$$d\mathcal{E} = \Delta V dq \quad (3.24)$$

reemplazando  $\Delta V = \frac{q}{C}$ , se tiene:

$$d\mathcal{E} = \frac{q}{C} dq \quad (3.25)$$

### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

Integrando sobre toda la carga que llevamos al condensador, obtenemos la energía total  $\mathcal{E}$  almacenada en el condensador

$$\mathcal{E} = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (3.26)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (3.27)$$

También podemos expresar este resultado en función de la diferencia de potencial  $\Delta V$ , usando la relación  $Q = C \Delta V$ ,

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(C \Delta V)^2}{2C} \quad (3.28)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (3.29)$$

#### 7.- Corriente y Resistencia.

En los capítulos anteriores estuvimos estudiando cargas en reposo, ahora, para avanzar en nuestro conocimiento del electromagnetismo, debemos considerar cargas en movimiento. En principio, tenemos varias maneras de poner cargas en movimiento mediante campos eléctricos: a) cargas en el vacío, y b) cargas libres en conductores, semiconductores, aleaciones metálicas, gases ionizados, electrolitos, plasmas, e incluso dieléctricos imperfectos que permiten movimiento neto de cargas. En la mayoría de los conductores los portadores de carga son los electrones, pero en otros casos, como electrolitos, gases ionizados y plasmas, la carga puede ser transportada por iones positivos y negativos.

Cuando una carga se encuentra en movimiento con respecto a un observador, se dice que existe una *corriente eléctrica*, y el proceso de transporte de carga se denomina *conducción*. Específicamente, la corriente eléctrica  $I$  en un punto dado, se define como la cantidad de carga por unidad de tiempo que cruza dicho punto, es decir,

$$I \equiv \frac{dq}{dt} \quad (3.30)$$

donde  $q = q(t)$  es la carga neta transportada en la unidad de tiempo  $t$ . La unidad de medida de la corriente eléctrica viene dada por  $I = \left[ \frac{C}{s} \right] = [A]$ , donde  $[C]$  es la unidad de medida de la carga eléctrica en Coulomb,  $[s]$  es la unidad de tiempo en segundos y  $[A]$  es la unidad de corriente eléctrica en Ampere.

En los metales, la corriente es transportada enteramente por los electrones, mientras que los iones pesados, cargados positivamente, permanecen fijos en las posiciones regulares de la estructura cristalina. Sólo los electrones más externos al átomo (los electrones de valencia) son libres para participar en el proceso de movimiento de carga neta de un punto a otro del espacio, produciendo un proceso de conducción. Los otros electrones, los más internos, permanecen ligados fuertemente a sus núcleos. Bajo condiciones estacionarias, se pueden introducir electrones en un extremo del metal y ser extraídos por el otro extremo, generando de este modo una corriente neta distinta de cero, permaneciendo, sin embargo, el metal con carga neta cero.

En general, la corriente eléctrica aparece como consecuencia de la aplicación de un campo eléctrico sobre los portadores de carga. Si el campo eléctrico se aplica sobre un conductor, los electrones con carga negativa, se mueven en sentido contrario a la dirección del campo eléctrico. Si hubiera portadores de carga positiva, estos se moverían en la dirección del campo eléctrico. Pero cargas negativas moviéndose hacia la izquierda, generan corriente en el mismo sentido que cargas positivas moviéndose hacia la derecha. Por lo tanto, ambos tipos de portadores de carga, positivos y negativos, producen corriente en la dirección del campo eléctrico.

Para los efectos de estos apuntes, y por simplicidad, consideraremos que los portadores de carga son positivos, aunque en los metales los que se mueven son los electrones. Los portadores de carga en un metal, están sujetos, fundamentalmente, a dos tipos de movimiento: a) movimiento al azar por simple agitación térmica con igual probabilidad en cualquiera de las tres direcciones espaciales, y b) movimiento en la dirección del campo eléctrico aplicado, llamado *movimiento de arrastre* o *drift motion*. El movimiento al azar no produce un movimiento neto de cargas en ninguna dirección específica del espacio, y por lo tanto no contribuye a la corriente eléctrica. En consecuencia, el *movimiento de arrastre* es el responsable de la corriente eléctrica. Esta corriente se denomina, *corriente de conducción*, existiendo otros tipos de corriente, como, por ejemplo, la corriente convectiva en la que el desplazamiento de masa de material cargado produce la corriente eléctrica.

Para obtener una relación entre la corriente eléctrica  $I$ , y algunas magnitudes microscópicas, como la carga de los portadores  $q_i$ , la velocidad del movimiento de arrastre  $\vec{v}_d$  (drift velocity), etc., consideremos un medio conductor que posee un solo tipo de portador de carga  $q$ . Consideremos además que el número de portadores de carga por

### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

unidad de volumen es  $N$ . Ignoremos el movimiento al azar por agitación térmica, y consideremos que cada uno de los portadores de carga positivos tienen la misma velocidad de arrastre  $\vec{v}_d$ , la cual hace un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Ahora podemos calcular la corriente eléctrica que cruza un elemento de superficie  $dS$ , tal como se muestra en la Fig. 3.6, donde  $\vec{S}$  indica el vector área normal a la superficie.

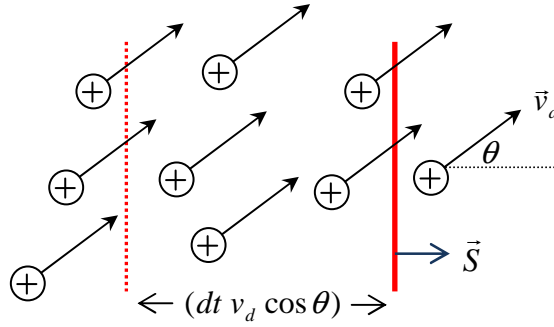


Figura 3.6 Movimiento de los portadores de carga en un conductor.

Durante el tiempo  $dt$ , cada portador de carga se mueve una distancia  $(dt v_d \cos \theta)$ , y el número total de cargas que logran llegar y cruzar la superficie de área  $dS$  viene dado por:  $dq = N q dV$ , donde  $dV = (dt v_d \cos \theta) dS$  es el elemento diferencial de volumen. Por lo tanto, en el tiempo  $dt$ , la corriente eléctrica  $dI$  que cruza la superficie  $dS$  viene dada por

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{N q (dt v_d \cos \theta) dS}{dt} \quad (3.31)$$

$$dI = N q v_d dS \cos \theta \quad (3.32)$$

El término  $(v_d dS \cos \theta)$  se puede escribir como el producto punto entre los vectores  $\vec{v}_d$  y  $d\vec{S}$ , es decir,  $(v_d dS \cos \theta) = (\vec{v}_d \cdot d\vec{S})$ , por lo tanto, la corriente diferencial  $dI$  que cruza la superficie  $dS$  se escribe finalmente en la forma

$$dI = N q \vec{v}_d \cdot d\vec{S} \quad (3.33)$$

Si existen varios tipos de portadores de carga,  $q_i$ , con su propia velocidad de arrastre,  $\vec{v}_{i,d}$  y su propio número de portadores por unidad de volumen,  $N_i$ , existirá una relación como la anterior para cada tipo de portador, y la corriente diferencial total debida a todos los tipos de portadores se escribirá en la forma:



$$dI = \left[ \sum_i N_i q_i \vec{v}_{i,d} \right] \cdot d\vec{S} \quad (3.34)$$

La cantidad entre paréntesis es un vector que tiene dimensiones de corriente eléctrica por unidad de área y se denomina *densidad de corriente* y se denota con el símbolo  $\vec{J}$ :

$$\vec{J} \equiv \sum_i N_i q_i \vec{v}_{i,d} \quad (3.35)$$

La densidad de corriente  $\vec{J}$  se puede definir punto a punto en un conductor y, por lo tanto, es una función vectorial de la posición. Usando  $\vec{J}$ , la relación (3.34) se escribe de la siguiente forma:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3.36)$$

Usando este resultado, la corriente total  $I$  que cruza la superficie macroscópica de forma arbitraria,  $S$ , se encuentra a través de la integral

$$I = \int_S dI = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

En este punto es interesante destacar que la densidad de corriente  $\vec{J}$  y la cantidad de carga por unidad de volumen,  $\rho = \left( \frac{dq}{dV} \right)$ , no son magnitudes independientes, sino que están relacionadas en cada punto a través de una ecuación diferencial llamada *ecuación de continuidad*, la cual se basa en la conservación de la carga, es decir, en la idea de que la carga no puede ser creada ni destruida.

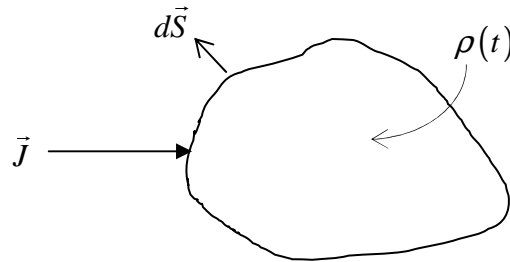


Figura 3.7 Densidad de corriente  $\vec{J}$  que ingresa a una región con densidad de carga  $\rho(t)$ .

Para obtener la ecuación de continuidad, consideremos la corriente eléctrica que *entra* a un volumen fijo  $V$  delimitado por una superficie cerrada arbitraria  $S$ . La superficie mostrada en la Fig. 3.7 contiene una densidad de carga  $\rho(t)$  que puede variar en el tiempo. Nosotros

### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

consideraremos como positiva la corriente que entra al volumen  $V$ , pero como  $d\vec{S}$  apunta hacia afuera de la superficie, debemos poner un signo menos delante de la integral, por lo tanto, escribimos

$$I = -\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3.37)$$

Aplicando el teorema matemático de Gauss, podemos pasar la integral de superficie a una integral de volumen:

$$I = -\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dV \quad (3.38)$$

Por otra parte, la corriente  $I$  se escribe en forma integral a través de la densidad de carga  $\rho$  contenida en el volumen fijo  $V$ . Dado que  $dq = \rho dV$ , la carga total  $q$  viene dada por

$$q = \int_V \rho dV \quad (3.39)$$

por lo tanto,

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dV \right) \quad (3.40)$$

dado que el volumen  $V$  es fijo, la derivada temporal actúa sólo sobre la densidad de carga  $\rho$ , luego

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.41)$$

Igualando las expresiones para la corriente dadas por (3.38) y por (3.41), se tiene

$$-\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.42)$$

pasando todo al lado derecho, obtenemos

$$\int_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (3.43)$$

Dado que el volumen fijo  $V$  es completamente arbitrario, la única manera de que la integral sea cero siempre, es que el integrando sea cero, es decir,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.44)$$

Esta es la llamada *ecuación de continuidad* del electromagnetismo.

## 8.- Ley de Ohm microscópica

Para la mayoría de los materiales, la densidad de corriente  $\vec{J}$  depende del campo eléctrico  $\vec{E}$  en la forma general

$$\vec{J} = g(\vec{E})\vec{E} \quad (3.45)$$

donde  $g(\vec{E})$  es una función complicada del campo eléctrico  $\vec{E}$  (generalmente una función no lineal). Sin embargo, para una gran cantidad de materiales conductores, se ha encontrado experimentalmente que la densidad de corriente  $\vec{J}$  depende sólo linealmente del campo  $\vec{E}$ , es decir,

$$\vec{J} = g\vec{E} \quad (3.46)$$

donde  $g$  es una constante llamada *conductividad eléctrica* del material. El recíproco  $\left(\frac{1}{g}\right)$  de un material se denomina *resistividad eléctrica*  $\eta$ . La relación (3.46) constituye la forma microscópica de la llamada *ley de Ohm*. En consecuencia, los materiales que cumplen con esta condición se denominan materiales lineales o materiales óhmicos. En lo que respecta a este curso, en general siempre estaremos interesados en materiales lineales, tal como lo hicimos con los dieléctricos lineales. La Fig. 3.8 compara el comportamiento de la relación  $J = g(E)E$  para el caso lineal en que  $g(E) = cte$ , correspondiente a la ley de Ohm microscópica y el caso no lineal en que  $g(E) = (1 - 0.6E)$ , para el cual no se cumple la ley de Ohm.

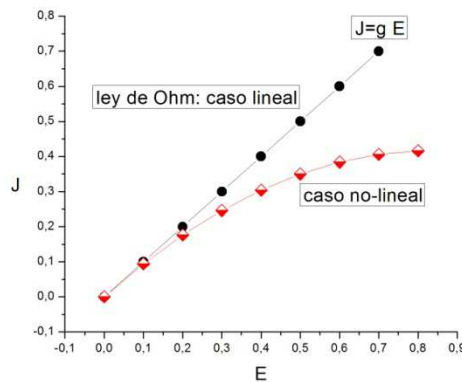


Figura 3.8 Relación lineal (ley de Ohm) entre  $J$  y  $E$  y relación no-lineal (materiales no-Ohmicos).

9.- Ley de Ohm macroscópica.

Para obtener la forma macroscópica de la ley de Ohm, consideremos un alambre conductor óhmico de forma cilíndrica de largo  $L$  y área  $A$ , entre cuyos extremos se mantiene una diferencia de potencial  $\Delta V$ , tal como se muestra en la Fig. 3.9. El alambre conductor es homogéneo y tiene conductividad  $g$ .

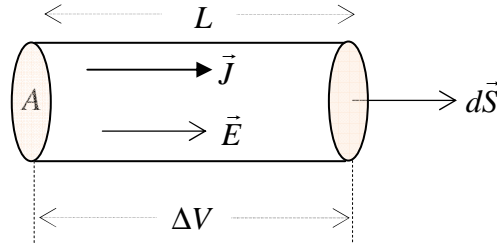


Figura 3.9 Conductor cilíndrico Ohmico.

La diferencia de potencial  $\Delta V$  establece un campo eléctrico  $\vec{E}$  puramente longitudinal en el interior del alambre, en la forma

$$\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.47)$$

Dada la geometría cilíndrica del alambre, el campo eléctrico tiene el mismo valor en cada punto interior al conductor, luego tenemos

$$\Delta V = EL \quad (3.48)$$

donde  $L$  es la longitud del alambre. El campo eléctrico en el interior del alambre está relacionado con la densidad de corriente a través de la relación (3.46),  $\vec{J} = g\vec{E}$ . Por otra parte, la corriente a través del alambre viene dada por:

$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = J \int_s dS = JA \quad (3.49)$$

en razón de que  $\vec{J}$  es constante y paralelo a  $d\vec{S}$  en cada punto del alambre cilíndrico recto.  $A$  es el área de la sección transversal del alambre. Reemplacemos  $J = gE$  en esta relación,

$$I = JA = (gE)A \quad (3.50)$$

Pero según relación (3.48)  $E = \frac{\Delta V}{L}$ . Reemplazando  $E$  en (3.50) se tiene

$$I = gEA = \left( \frac{gA}{L} \right) \Delta V \quad (3.51)$$

Si usamos la resistividad  $\eta = \left(\frac{1}{g}\right)$ , y despejamos  $\Delta V$ , nos queda

$$\Delta V = \left(\frac{\eta L}{A}\right) I \quad (3.52)$$

Definimos la resistencia  $R$ , del alambre cilíndrico en la forma

$$R = \frac{\eta L}{A} \quad (3.53)$$

Nótese que la resistencia  $R$  es una magnitud constante que depende de la geometría del alambre (área  $A$  y largo  $L$ ) y de las propiedades del conductor frente al paso de la corriente (la resistividad  $\eta$ ). Con esta definición, la relación (3.52), queda

$$\Delta V = R I \quad (3.54)$$

Esta relación entre  $\Delta V$  y la corriente  $I$ , también es lineal, ya que la resistencia  $R$  es constante. Esta relación se conoce como la ley de Ohm macroscópica, o simplemente ley de Ohm. La ley de Ohm dada por la relación (3.54), cumple dos roles distintos; por un lado representa el comportamiento experimental de una gran variedad de materiales conductores, y por otro puede ser empleada como la definición de la resistencia eléctrica  $R$ , para cualquier material, sea o no conductor, cumpla o no experimentalmente con la ley de Ohm, sobre el cual se establece una corriente constante  $I$ , esto es, la resistencia  $R$  de cualquier material, se puede definir como el cociente experimental

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I} \quad (3.55)$$

Sin embargo, recalamos que en general trabajaremos con materiales que cumplen la ley de Ohm, es decir, materiales para los cuales la resistencia  $R$  es una constante y la relación entre la diferencia de potencial  $\Delta V$  y la corriente eléctrica  $I$  es una relación lineal, donde  $R$  es la pendiente de la recta en el gráfico  $\Delta V$  versus  $I$ . La unidad de medida de la resistencia viene dada por  $[R] = \left[\frac{V}{A}\right] = [\Omega]$ , donde el símbolo  $\Omega$  representa a la unidad de medida en Ohm,  $[V]$  es la unidad de medida de la diferencia de potencial en Volt y  $[A]$  es la unidad de medida de la corriente eléctrica en Ampere.

### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

#### 10.- Resistencias conectadas en serie.

Cuando conectamos las resistencias en serie, como se muestra en la Fig. 3.10, existe una única corriente eléctrica  $I$  que atraviesa cada resistencia.

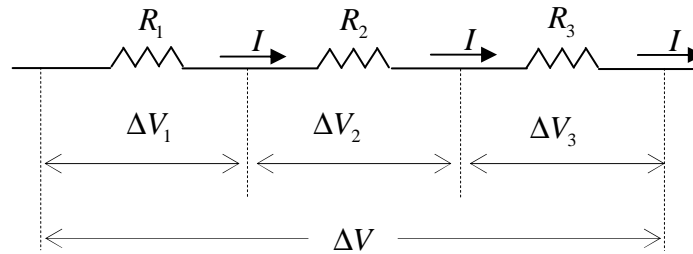


Figura 3.10 Resistencias conectadas en serie.

Si aplicamos la relación  $\Delta V = R I$  a cada conductor, tenemos que

$$\Delta V_i = R_i I \quad (3.56)$$

La diferencia de potencial entre los extremos de las resistencias en serie viene dado por

$$\Delta V = \sum_i \Delta V_i = \sum_i (R_i I) = \left[ \sum_i R_i \right] I = R_{\text{serie}} I \quad (3.57)$$

es decir, la resistencia equivalente al conjunto de resistencias en serie, es igual a la suma de las resistencias individuales

$$R_{\text{serie}} = \sum_i R_i \quad (3.58)$$

#### 11.- Resistencias conectadas en paralelo.

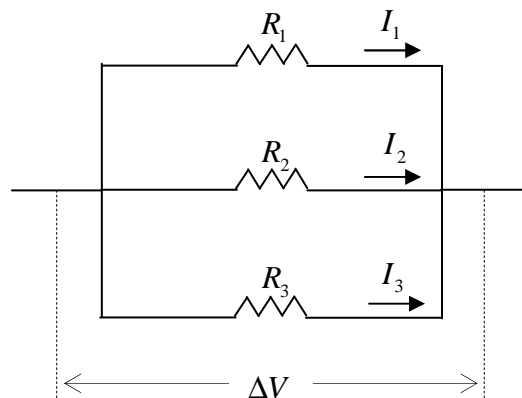


Figura 3.11 Conexión de resistencias en paralelo.

Cuando conectamos las resistencias en paralelo, como se muestra en la Fig. 3.11, la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los extremos de cada resistencia  $R_i$  es la misma, y a su vez, es la misma diferencia de potencial de toda la conexión en paralelo, es decir,  $\Delta V_i = \Delta V, \forall i$ . Dado que ahora aparece una variedad de caminos posibles para el movimiento de los portadores de carga, se establecen diferentes corrientes eléctricas  $I_i$  a través de cada resistencia  $R_i$ , cumpliéndose la siguiente relación a través de cada resistencia:

$$\Delta V_i = \Delta V = R_i I_i \quad (3.59)$$

La corriente total  $I$  en el circuito viene dada por

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \frac{\Delta V}{R_i} = \Delta V \left[ \sum_i \frac{1}{R_i} \right] \quad (3.60)$$

Escribiendo el inverso de la resistencia equivalente en el circuito en paralelo en la forma

$$\left( \frac{I}{\Delta V} \right) = \left( \frac{1}{R_{\text{paralelo}}} \right) \quad (61)$$

se tiene

$$\frac{1}{R_{\text{paralelo}}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (3.62)$$

## 12.- Fuerza electromotriz (Fem $\mathcal{E}$ ).

Recordemos que para el campo electrostático  $\vec{E}_c$  (conservativo) se cumple que  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_c = \vec{0}$  (el campo eléctrico es irrotacional), o en forma integral  $\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$ . Usando solamente campos electrostáticos no se puede producir una corriente estacionaria, ya que para mantener la corriente estacionaria se requiere una potencia por unidad de volumen igual a  $\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}_d}{V} = \frac{nq\vec{E} \cdot \vec{v}_d}{V} = \vec{J} \cdot \vec{E}$ , pero un campo irrotacional no puede producir esta potencia por unidad de volumen. La Fem  $\mathcal{E}$  se mide en Volt,  $[V]$ , igual que la diferencia de potencial.

Las corrientes estacionarias se pueden establecer en un conductor sólo si están presentes fuentes de fuerza electromotriz (Fem  $\mathcal{E}$ ), las cuales producen campos eléctricos no-conservativos  $\vec{E}_{nc}$  con rotor distinto de cero, es decir, campos eléctricos de una naturaleza

### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

absolutamente distinta a la naturaleza de los campos electrostáticos. Supongamos que en un determinado material existen campos eléctricos no-conservativos,  $\vec{E}_{nc}$ , con rotor distinto de cero ( $\vec{\nabla} \times \vec{E}_{nc} \neq \vec{0}$ ), supongamos además que también están presentes los campos electrostáticos (conservativos)  $\vec{E}_c$  cuyo rotor es cero,  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_c = \vec{0}$ . La densidad de corriente  $\vec{J}$  viene dada por la relación lineal (3.46)  $\vec{J} = g\vec{E}$ , donde el campo eléctrico  $\vec{E}$  es la suma de los campos conservativos  $\vec{E}_c$  más los campos no-conservativos  $\vec{E}_{nc}$ , es decir,  $\vec{E} = (\vec{E}_c + \vec{E}_{nc})$ . Luego,  $\vec{J} = g\vec{E}$  viene dada por

$$\vec{J} = g(\vec{E}_c + \vec{E}_{nc}) \quad (3.63)$$

La fuerza electromotriz o Fem  $\mathcal{E}$  se define como la integral de camino cerrada en la forma

$$\mathcal{E} \equiv \oint (\vec{E}_c + \vec{E}_{nc}) \cdot d\vec{l} \quad (3.64)$$

donde  $d\vec{l}$  es un vector diferencial tangente a la trayectoria cerrada. Separando las integrales, tenemos

$$\mathcal{E} \equiv \oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} \quad (3.65)$$

Sabemos que para los campos electrostáticos (conservativos) se cumple que  $\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$ , luego, la Fem (3.65) viene dada por

$$\mathcal{E} \equiv \oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} \quad (3.66)$$

En consecuencia, la fuerza electromotriz Fem  $\mathcal{E}$  es producida solamente por campos eléctricos con rotor distinto de cero, lo cual implica que la corriente es enteramente debida a campos no-conservativos. Las fuentes de Fem  $\mathcal{E}$  son dispositivos capaces de generar trabajo sobre los portadores de carga o generar una diferencia de potencial entre dos puntos. Este dispositivo genera campos eléctricos no-conservativos o disipativos. Como ejemplos de fuentes de Fem podemos nombrar a las pilas, las baterías, los alternadores, etc.

Usando (3.63), la Fem (3.64) también se puede escribir en función de la densidad de corriente y de la conductividad  $g$ ,

$$\mathcal{E} = \oint \frac{\vec{J} \cdot d\vec{l}}{g} \quad (3.67)$$



En el caso en que la densidad de corriente sea aproximadamente constante sobre la mayor parte de la trayectoria de integración, esta relación se puede escribir como

$$\mathcal{E} = \frac{J L}{g} = \frac{I L}{A g} \quad (3.68)$$

donde hemos escrito la densidad de corriente  $J$  en la forma  $J = \left(\frac{I}{A}\right)$ . Pero la resistividad

$\eta = \left(\frac{1}{g}\right)$  es el recíproco de la conductividad  $g$ , luego la Fem  $\mathcal{E}$ , queda

$$\mathcal{E} = I \left( \frac{\eta L}{A} \right) = I R \quad (3.69)$$

donde  $R = \left( \frac{\eta L}{A} \right)$  es la resistencia del conductor definida anteriormente en relación (3.53).

En general, podemos definir la resistencia  $R$  en cualquier elemento de un circuito en la siguiente forma:

$$R \equiv \frac{\mathcal{E}}{I} \quad (3.70)$$

### 13.- Circuitos eléctricos.

Los circuitos eléctricos se definen como caminos eléctricos cerrados formados por alambres conductores por los cuales la corriente eléctrica  $I$  puede fluir por una variedad de caminos.

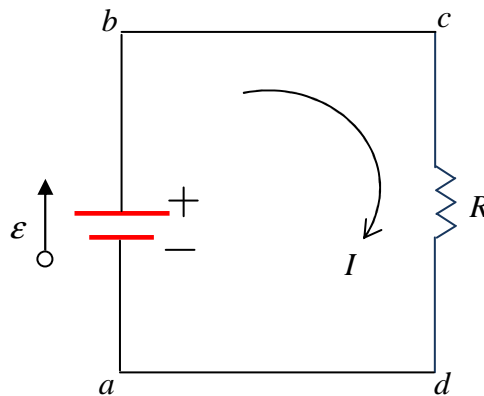


Figura 3.12 Circuito eléctrico simple.

El problema básico de la teoría de circuitos eléctricos es el siguiente: conocidas las Fem  $\mathcal{E}$  y las resistencias  $R$  presentes en el circuito, ¿cuál es la corriente  $I$  que pasa por cada uno

### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

de los puntos del circuito?. Además de resistencias  $R$ , el circuito puede tener condensadores con capacitancia  $C$  y bobinas o solenoides que presentan determinadas inductancias  $L$ .

Recorramos el circuito de la Fig. 3.12 en el sentido  $abcd$ , que coincide con la dirección de la Fem  $\mathcal{E}$  y también coincide con el sentido de la corriente eléctrica  $I$  propuesta. Calculemos las diferencias de potencial entre cada par de puntos:

Desde  $a$  hasta  $b$ .

En ese tramo sólo existe una Fem de valor  $\mathcal{E}$ . Cuando una Fem es atravesada en el sentido positivo de la Fem, se produce una diferencia de potencial dada por

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = \mathcal{E} \quad (3.71)$$

Desde  $c$  hasta  $d$ .

En este tramo existe una resistencia que es recorrida a favor de la corriente  $I$ . Cuando se atraviesa una resistencia en el mismo sentido en que viaja la corriente  $I$ , la diferencia de potencial vale

$$\Delta V_{cd} = V_d - V_c = -IR \quad (3.72)$$

En los tramos  $bc$  y  $da$ , la diferencia de potencial vale cero, porque cada tramo sólo contiene alambres metálicos.

Si partimos del punto  $a$  y vamos midiendo los potenciales a medida que recorremos el circuito hasta llegar de nuevo hasta el punto  $a$ , la diferencia de potencial electrostático es cero, porque se restan dos potenciales idénticos.

$$V_a + \Delta V_{ba} + \Delta V_{dc} - V_a = 0 \quad (3.73)$$

Usando los resultados anteriores, se tiene

$$\mathcal{E} - IR = 0 \quad (3.74)$$

Finalmente, vemos que se cumple que

$$\mathcal{E} = IR \quad (3.75)$$

Esto significa que la Fem  $\mathcal{E}$  es capaz de mantener una corriente  $I$  circulando por el circuito, a pesar de la existencia de una resistencia  $R$  que se opone al paso de la corriente.

14.- Segmento de circuito.

Calculemos ahora la diferencia de potencial  $\Delta V_{ab} = V_b - V_a$  entre los puntos extremos  $a$  y  $b$  del segmento de circuito que se muestra en la Fig. 3.13.

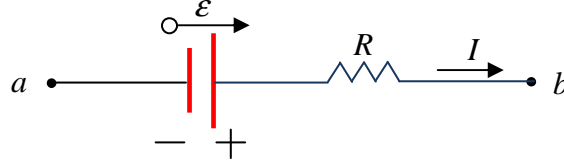


Figura 3.13 Segmento de circuito con corriente.

Sabemos por la relación (3.63) que la densidad de corriente se puede expresar en función del campo eléctrico resultante,

$$\frac{\vec{J}}{g} = \vec{E}_c + \vec{E}_{nc} \quad (3.76)$$

multiplicando esta expresión por el diferencial de camino  $d\vec{l}$ , e integrando respecto al camino desde  $a$  hasta  $b$ , se tiene

$$\frac{1}{g} \int_a^b \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} \quad (3.77)$$

Veamos el valor de cada integral por separado.

a) la integral  $\frac{1}{g} \int_a^b \vec{J} \cdot d\vec{l}$ .

A lo largo de la trayectoria desde  $a$  hasta  $b$ ,  $\vec{J}$  y  $d\vec{l}$  son paralelos, y la integral queda

$$\frac{1}{g} \int_a^b \vec{J} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{g} \int_a^b J dl \quad (3.78)$$

pero si la corriente es constante, entonces  $J = \left( \frac{I}{A} \right)$ , también es constante y puede salir

fuera de la integral, luego

$$\frac{1}{g} \int_a^b \vec{J} \cdot d\vec{l} = \frac{L}{gA} I \quad (3.79)$$

$$\frac{1}{g} \int_a^b \vec{J} \cdot d\vec{l} = R_{ab} I \quad (3.80)$$

donde la resistencia  $R_{ab}$  viene dada por  $R_{ab} = \frac{L}{gA}$ .

b) la integral  $\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l}$ .

### 2.2.5 Unidad III: Condensadores, Resistencia Eléctrica y leyes de Kirchhoff

Esta integral es justo la definición de diferencia de potencial con signo negativo,

$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l}$ . Por lo tanto

$$\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = -\Delta V_{ab} = V_a - V_b \quad (3.81)$$

c) la integral  $\int_a^b \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l}$ .

Esta integral mide el valor de las Fem  $\mathcal{E}$  medidas entre  $a$  y  $b$ , es decir,

$$\int_a^b \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_{ab} \quad (3.82)$$

Reemplazando los valores de la integrales (3.80), (3.81) y (3.82) en la relación (3.77), se tiene

$$R_{ab} I = (V_a - V_b) + \mathcal{E}_{ab} \quad (3.83)$$

a partir de esta expresión encontramos la diferencia de potencial entre dos puntos  $a$  y  $b$  del trozo de circuito

$$\Delta V_{ab} = (V_b - V_a) = \mathcal{E}_{ab} - R_{ab} I \quad (3.84)$$

Nótese que si unimos el punto  $a$  con el punto  $b$ , se tiene un circuito cerrado como el mostrado en la Fig. 3.12. Además se tiene que  $V_a = V_b$  y  $\Delta V_{ab} = 0$ , y la relación (3.84), queda

$$\mathcal{E}_{ab} = R_{ab} I \quad (85)$$

Relación idéntica a la relación (3.75) del circuito cerrado estudiado más arriba.

### 15.- Leyes de Kirchhoff

Un circuito puede estar formado por varias ramas o caminos distintos, o más precisamente, un circuito está formado por una malla de caminos o trayectorias conductoras, cada uno de los cuales puede contener una Fem  $\mathcal{E}$  o fuente de fuerza electromotriz. Además de los caminos, las Fem y las resistencias, debemos considerar las trayectorias cerradas dentro del circuito, y los nodos o puntos de ramificación en los cuales concurren o se unen tres o más elementos conductores.

El problema central del análisis de circuitos es: dadas la resistencia y la Fem de cada elemento de un circuito, encontrar las corrientes en cada uno de estos elementos. Este problema se puede resolver en forma sistemática por medio de las llamadas leyes de Kirchhoff.

#### 15.1.-Ley de los nodos

La suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un nodo o punto de ramificación vale cero,

$$\sum_j I_j = 0 \quad (3.86)$$

Esto corresponde a la conservación de la carga en un circuito de corriente estacionaria.

#### 15.2.- Ley de suma de voltajes

La suma algebraica de las Fem  $\mathcal{E}_j$  en cualquier trayectoria cerrada del circuito, es igual a la suma algebraica de los productos  $IR$  en la misma trayectoria cerrada:

$$\sum_j \mathcal{E}_j = \sum_j I_j R_j \quad (3.87)$$



### 2.2.6 Unidad III: Problemas Resueltos

En esta parte del Dossier se aplican los conceptos aprendidos sobre condensadores, resistencias, fuentes de fuerza electromotriz (Fem) y circuitos eléctricos en la resolución de problemas típicos. Se aplican las leyes de Kirchhoff para calcular el valor de la corriente eléctrica a través de cada resistencia, en diferentes tipos de circuitos.

1.- Un condensador de capacitancia  $C_0$ , de placas paralelas de área  $A$ , separadas una distancia  $d$ , se carga con una carga  $Q_0$  y luego se desconecta de la Fem (ver Fig. 1.1). Posteriormente se introduce un dieléctrico de constante  $k$  y espesor  $b$ , que no llena completamente el espacio entre las placas, es decir,  $b < d$ . Después de introducir el dieléctrico, hallar la capacitancia  $C$ , la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre las placas y la carga  $Q$ .

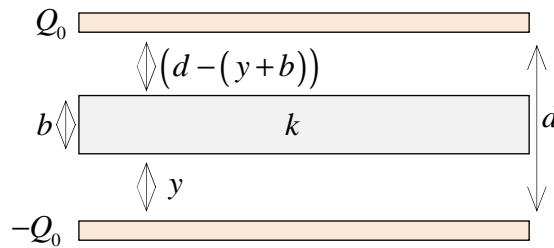


Figura 1.1 Condensador de placas paralelas con dieléctrico.

#### Solución:

Cálculo de todas las magnitudes de interés, antes de introducir el dieléctrico.

El condensador se cargó y luego se desconectó de la Fem, entonces

$$Q = Q_0 \quad (1)$$

La diferencia de potencial entre las placas viene dada por

$$V_0 = E_0 d \quad (2)$$

donde  $E_0$  es el campo eléctrico entre las placas del condensador sin dieléctrico, y apunta desde arriba (placa positiva), hacia abajo (placa negativa) y su valor viene dado por

$$E_0 = \frac{Q_0}{A\epsilon_0} \quad (3)$$

### 2.2.6 Unidad III: Problemas Resueltos

donde  $A$  es el área de las placas del condensador y  $\varepsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío. Para un condensador de placas paralelas, sabemos que su capacitancia viene dada por

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (4)$$

Cálculo de todas las magnitudes después de introducir el dieléctrico.

Dado que el condensador se cargó y luego se desconectó de la Fem, entonces la carga se mantiene constante, es decir,

$$Q = Q_0 \quad (5)$$

Sin embargo, la introducción del dieléctrico entre las placas cambia el valor de la diferencia de potencial entre las placas y cambia además la capacitancia del condensador.

Calculemos la diferencia de potencial.

La diferencia de potencial entre las placas del condensador se calcula a partir de los campos eléctricos que existen entre las placas. Sabemos que hay dos tipos de campo entre las placas: a) campo eléctrico  $\vec{E}_0$  en la región sin dieléctrico, y campo eléctrico  $\vec{E}_d$  en la región con dieléctrico. Usando estos campos, la diferencia de potencial viene dada por

$$\Delta V = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^y \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} - \int_y^{(y+b)} \vec{E}_d \cdot d\vec{l} - \int_{(y+b)}^d \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} \quad (6)$$

La relación entre los campos  $E_0$  y  $E_d$ , viene dada por

$$E_d = \frac{E_0}{k} \quad (7)$$

Es decir, el campo eléctrico dentro del dieléctrico es siempre menor que el campo eléctrico fuera del dieléctrico. La Fig. 1.2 muestra que todos los campos eléctricos apuntan hacia abajo, es decir, desde la placa positiva hacia la placa negativa. La razón es que las cargas de polarización inducida, generan un campo interno que se opone al campo externo y eso disminuye el campo resultante en el dieléctrico



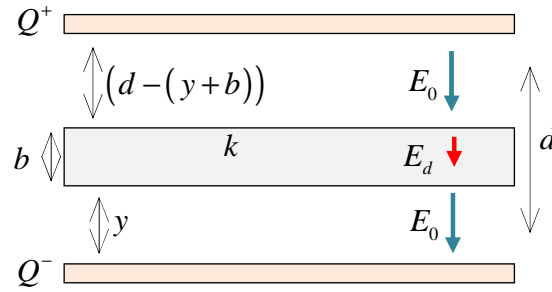


Figura 1.2 Campo eléctrico dentro y fuera del dieléctrico.

El desplazamiento diferencial  $d\vec{l}$  en la integral apunta hacia arriba, porque integramos desde la placa inferior negativa hasta la placa superior positiva. Dado que los campos eléctricos apuntan hacia abajo, se cumple que  $d\vec{l}$  y  $\vec{E}$  son opuestos, por lo tanto,  $\vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = -E_0 dl$  y que  $\vec{E}_d \cdot d\vec{l} = -E_d dl$ : reemplazando estos resultados en la relación (6), se tiene

$$\Delta V = \int_0^y E_0 dl + \int_y^{(y+b)} E_d dl + \int_{(y+b)}^d E_0 dl \quad (8)$$

pero los campos dentro de las placas del condensador de placas paralelas son constantes, luego salen del signo integral,

$$\Delta V = E_0 y + E_d b + E_0 (d - y - b) \quad (9)$$

$$\Delta V = E_d b + E_0 (d - b) \quad (10)$$

usando (7), obtenemos la diferencia de potencial entre las placas cuando hay un dieléctrico de espesor  $b$  y constante  $k$  entre las placas,

$$\Delta V = E_0 \left( \frac{b(1-k) + kd}{k} \right) \quad (11)$$

Nótese que este resultado es absolutamente independiente de la posición  $y$  del dieléctrico entre las placas.

Con este resultado podemos calcular la capacitancia del condensador con dieléctrico. Sabemos que la capacitancia viene definida como

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (12)$$

### 2.2.6 Unidad III: Problemas Resueltos

En este caso debemos poner la carga final en el condensador con dieléctrico. Como vimos en la relación (5), se cumple que  $Q = Q_0$ , ya que se desconectó la Fem del condensador. Entonces, usando este resultado y la diferencia de potencial (11), la capacitancia (12), queda,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{kQ_0}{E_0(b(1-k) + kd)} \quad (13)$$

Pero  $E_0 = \frac{Q_0}{A\epsilon_0}$ , entonces la capacitancia  $C$  con dieléctrico, vale

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{k\epsilon_0 A}{(b(1-k) + kd)} \quad (14)$$

Expresemos este resultado en función de la capacitancia sin dieléctrico  $C_0 = \frac{A\epsilon_0}{d}$

$$C = \frac{kd}{(b(1-k) + kd)} C_0 \quad (15)$$

Este resultado muestra que la capacitancia con dieléctrico siempre es mayor que la capacitancia sin dieléctrico, ya que el término que multiplica a  $C_0$  en la relación (15), siempre es mayor que uno, es decir,

$$\frac{kd}{(b(1-k) + kd)} > 1 \quad (16)$$

Si  $k = 1$ , entonces el dieléctrico sería el vacío o aire, igual que lo que existe entre las placas. Entonces se trataría de un condensador sin dieléctrico, y su capacitancia viene dada por

$$C = C_0 \quad (17)$$

Si  $b = d$ , entonces el dieléctrico llenaría completamente el espacio entre las placas del condensador. La capacitancia sería entonces

$$C = \frac{dkC_0}{(d(1-k) + kd)} = kC_0 \quad (18)$$

Este resultado reproduce los resultados experimentales que definen la constante dieléctrica  $k$  en la forma

$$k = \frac{C}{C_0} \quad (19)$$

Si el espesor  $b$  de la placa de dieléctrico tiende a cero,  $b \rightarrow 0$ , entonces, el espacio entre las placas sería el vacío y usando (15), se obtiene

$$C = C_0 \quad (20)$$

resultado que coincide con el caso en que  $k = 1$  para cualquier espesor  $b$ .

2.- Resuelva el problema 1 considerando que el condensador con dieléctrico se puede considerar como una conexión de condensadores en serie.

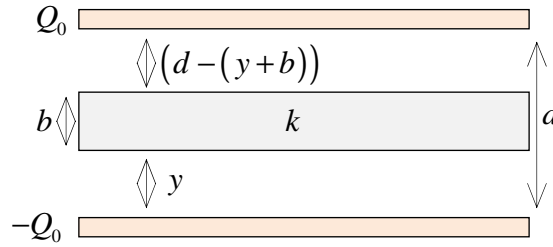


Figura 2.1 Condensador de placas paralelas con dieléctrico.

**Solución:**

En principio tenemos tres condensadores en serie:

a) un condensador de área  $A$  y separación entre placas  $y$ , lleno con aire de capacitancia

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{y} \quad (21)$$

b) un condensador de área  $A$  y separación entre placas  $b$ , lleno con un dieléctrico de constante  $k$ , de capacitancia

$$C_2 = k \left( \frac{\epsilon_0 A}{b} \right) \quad (22)$$

c) un condensador de área  $A$  y separación entre placas  $(d - (y + b))$ , lleno con aire de capacitancia

$$C_3 = \frac{\epsilon_0 A}{d - (y + b)} \quad (23)$$

Entonces usando la expresión para la capacitancia en serie, tenemos que la capacitancia equivalente viene dada por

### 2.2.6 Unidad III: Problemas Resueltos

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (24)$$

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{y}{\epsilon_0 A} + \frac{b}{k\epsilon_0 A} + \frac{d - (y + b)}{\epsilon_0 A} \quad (25)$$

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{1}{\epsilon_0 A} (yk + b + kd - k(y + b)) \quad (26)$$

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{b(1 - k) + kd}{k\epsilon_0 A} \quad (27)$$

invirtiendo esta expresión, se tiene la capacitancia equivalente en serie

$$C_{serie} = \frac{k\epsilon_0 A}{(b(1 - k) + kd)} \quad (28)$$

Resultado que coincide completamente con la capacitancia obtenida a través del cálculo del potencial entre las placas obtenido en relación (14). Si usamos el valor de la capacitancia del condensador sin dieléctrico,  $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ , la relación (28), coincide con la relación (15), es decir,

$$C = \frac{kd}{(b(1 - k) + kd)} C_0 \quad (29)$$

En el problema 1 vimos que todos los resultados son independientes de la posición  $y$  de la placa de dieléctrico en el condensador. Entonces, podríamos considerar que nuestro condensador está formado por sólo por dos condensadores en serie:

a) un condensador de área  $A$ , sin dieléctrico de espesor  $(d - b)$ , con capacitancia

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d - b} \quad (30)$$

b) un condensador de área  $A$ , lleno con dieléctrico de constante  $k$ , de espesor  $b$ , con capacitancia

$$C_2 = k \left( \frac{\epsilon_0 A}{b} \right) \quad (31)$$

La capacitancia en serie viene dada por

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (32)$$

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{d-b}{\epsilon_0 A} + \frac{b}{k\epsilon_0 A} = \frac{1}{k\epsilon_0 A} (k(d-b) + b) \quad (33)$$

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{b(1-k) + kd}{k\epsilon_0 A} \quad (34)$$

invirtiendo, se tiene el mismo resultado anterior

$$C_{serie} = \frac{k\epsilon_0 A}{b(1-k) + kd} \quad (35)$$

3.- Consideremos un condensador de placas cuadradas de lado  $L$  y separación  $d$  entre placas. Existen dos tipos de dieléctrico dentro del condensador, con espesores distintos, tal como se muestra en la Fig. 3.1. Las constantes dieléctricas valen  $k_1$  y  $k_2$ , y el espesor de las placas dieléctricas son  $d_1 = \frac{d}{4}$  y  $d_2 = d$ , respectivamente. Según la Fig. 3.1, el ancho de cada lámina dieléctrica viene dada por  $a_1 = \frac{L}{3}$  y  $a_2 = \frac{2L}{3}$ . La región sin dieléctrico se puede considerar como un condensador de capacitancia  $C_3$  con constante dieléctrica  $k = 1$ , espesor  $d_3 = \frac{d}{4}$  y ancho  $a_3 = \frac{L}{3}$

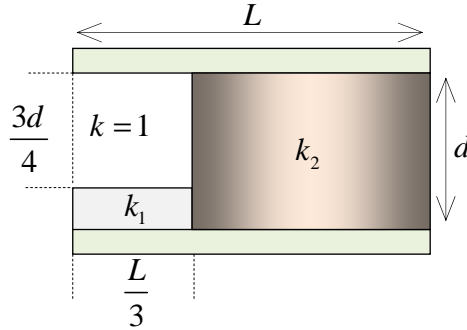


Figura 3.1 Condensador de placas paralelas con tres dieléctricos.

### Solución:

Dado lo aprendido en el problema 2, podemos considerar a este condensador con dieléctrico como una combinación de condensadores en serie y paralelo. El diagrama de la conexión de los condensadores es la siguiente.

### 2.2.6 Unidad III: Problemas Resueltos

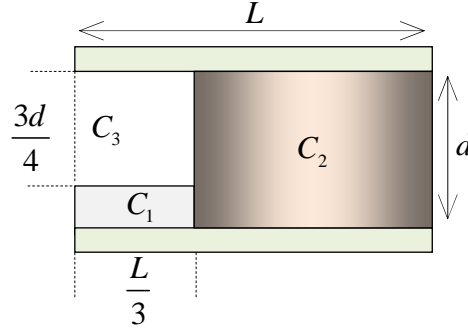


Figura 3.2 Condensadores en serie y paralelo.

El condensador sin dieléctrico  $C_3$ , tiene una distancia de separación entre placas  $d_3 = \frac{3d}{4}$  y

un área  $A_3 = L \left( \frac{L}{3} \right)$ . Por lo tanto, su capacitancia viene dada por

$$C_3 = \frac{\epsilon_0 A_3}{d_3} = \frac{\epsilon_0}{\left( \frac{3d}{4} \right)} \left( \frac{L^2}{3} \right) = \frac{4}{9} \left( \frac{\epsilon_0 L^2}{d} \right) \quad (36)$$

Consideremos el condensador cuando no tiene ningún dieléctrico. El área del condensador de placas paralelas vale  $A = L^2$ , y dado que su separación entre placas es  $d$ , su capacitancia viene dada por

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (37)$$

Entonces, la capacitancia del condensador  $C_3$  sin dieléctrico dada en (36) puede ser escrita en función de  $C_0$ , dada en (37), en la forma

$$C_3 = \frac{4}{9} C_0 \quad (38)$$

El condensador  $C_2$  con dieléctrico  $k_2$ , tiene una distancia de separación entre placas

$d_2 = d$  y un área  $A_2 = L \left( \frac{2L}{3} \right)$ . Por lo tanto, su capacitancia viene dada por

$$C_2 = \frac{k_2 \epsilon_0 A_2}{d_2} = \frac{k_2 \epsilon_0}{d} L \left( \frac{2L}{3} \right) = \frac{2k_2 \epsilon_0 L^2}{3d} \quad (39)$$

Usando el valor de  $C_0$ , se obtiene

$$C_2 = \frac{2}{3} k_2 C_0 \quad (40)$$

El condensador  $C_1$  con dieléctrico  $k_1$ , tiene una distancia de separación entre placas

$d_2 = \frac{d}{4}$  y un área  $A_2 = L\left(\frac{L}{3}\right)$ . Por lo tanto, su capacitancia viene dada por

$$C_1 = \frac{k_1 \epsilon_0 A_1}{d_1} = \frac{k_1 \epsilon_0}{\left(\frac{d}{4}\right)} L \left(\frac{L}{3}\right) = \frac{4k_1 \epsilon_0 L^2}{3d} \quad (41)$$

Usando el valor de  $C_0$ , se obtiene

$$C_1 = \frac{4}{3} k_1 C_0 \quad (42)$$

Con estos valores podemos buscar la capacitancia equivalente de todo el circuito.

Simbólicamente, la conexión tiene la forma

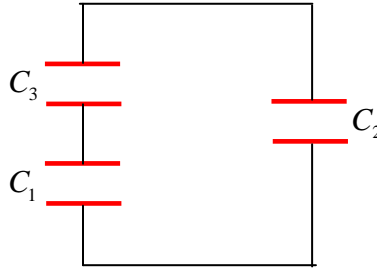


Figura 3.3 Conexión serie y paralelo equivalente.

Los condensadores  $C_3$  y  $C_1$  están en serie, luego su valor equivalente serie, viene dado por

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} \quad (43)$$

reemplazando los valores dados por (38) y (42), se tiene

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{1}{\left(\frac{4}{9} C_0\right)} + \frac{1}{\left(\frac{4}{3} k_1 C_0\right)} \quad (44)$$

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{9}{(4C_0)} + \frac{3}{(4k_1 C_0)} = \frac{(9k_1 + 3)}{(4k_1 C_0)} \quad (45)$$

invirtiendo se tiene

### 2.2.6 Unidad III: Problemas Resueltos

$$C_{serie} = \left( \frac{4k_1}{9k_1 + 3} \right) C_0 \quad (46)$$

Ahora el circuito se reduce a los condensadores  $C_2$  y  $C_{serie}$  en paralelo entre sí. La capacitancia equivalente de los condensadores en paralelo viene dada por la suma de los condensadores

$$C_{paralelo} = C_2 + C_{serie} \quad (47)$$

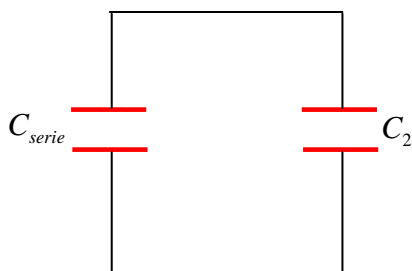


Figura 3.4 Conexión en paralelo equivalente.

Reemplazando los valores obtenidos en (40) y (46), tenemos

$$C_{paralelo} = \frac{2}{3} k_2 C_0 + \left( \frac{4k_1}{9k_1 + 3} \right) C_0 \quad (48)$$

$$C_{paralelo} = \left( \frac{2k_2(3k_1 + 1) + 4k_1}{(9k_1 + 3)} \right) C_0 \quad (49)$$

4.- Dado el circuito de la Fig. 4.1, encontrar las corrientes por cada resistencia.

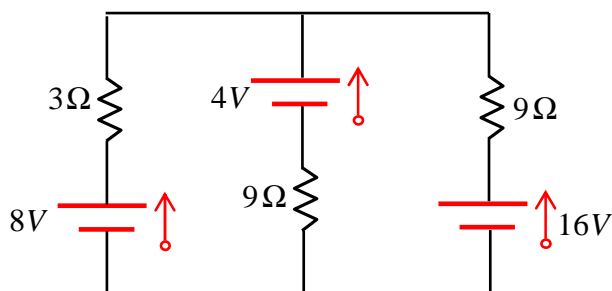


Figura 4.1 Circuito con resistencias y Fem.



**Solución:**

a) consideremos el uso de corrientes por rama, es decir, por cada rama existe una única corriente que la atraviesa. Una vez dibujadas las corrientes en el sentido propuesto, aplicamos las dos leyes de Kirchhoff.

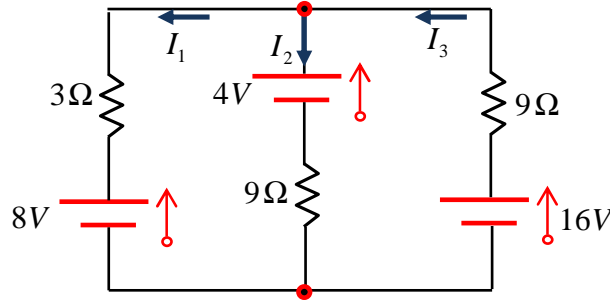


Figura 4.2 Circuito con dos mallas y un nodo.

Apliquemos la ley de los nodos de Kirchhoff al nodo superior de la malla en la Fig. 4.2.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (50)$$

Ahora apliquemos la ley de la suma de voltajes de Kirchhoff a dos mallas diferentes.

a) malla de la izquierda de la Fig. 4.2, circulando en el sentido de movimiento de los punteros del reloj.

$$8 + 3I_1 - 4 - 9I_2 = 0 \quad (51)$$

b) malla exterior, circulando de la misma forma que la malla anterior.

$$8 + 3I_1 + 9I_3 - 16 = 0 \quad (52)$$

Las ecuaciones (50), (51) y (52), constituyen un sistema de ecuaciones de tres incógnitas:  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Haciendo el álgebra correspondiente, se obtienen las corrientes por cada rama y por cada resistencia,

$$I_1 = \frac{4}{15}(A), \quad I_2 = \frac{8}{15}(A), \quad I_3 = \frac{12}{15}(A) \quad (53)$$

Dado que todos los resultados son positivos, significa que nuestra elección inicial (arbitraria) de los sentidos de las tres corrientes fue correcta. En caso de que alguna corriente hubiera resultado negativa, el resultado numérico seguiría siendo correcto, solo que la corriente en realidad estaría circulando en el sentido contrario al sentido propuesto inicialmente.



### 2.2.7 Unidad IV: Magnetismo

**Equation Chapter (Next) Section 4** En esta sección se estudian las propiedades de los campos magnéticos estáticos y dinámicos, así como también se describe y analiza el comportamiento de las leyes experimentales que permiten describir a los campos magnéticos estáticos y dinámicos. Se finaliza la unidad con la formulación de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.

#### 1.- Campo Magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .

En esta sección estudiaremos el comportamiento del campo magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  en el caso estático y en el caso dinámico. En primer lugar, debemos destacar que el campo magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  tiene un carácter distinto del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , a pesar de que las ecuaciones que permiten su descripción son relativamente similares.

Las fuentes (las causas) que crean el campo magnético  $\vec{B}$  son bien diversas pero, macroscópicamente, podemos nombrar a los imanes naturales y artificiales, las cargas eléctricas  $q$  en movimiento, los alambres con corriente  $I$  y los alambres con corriente  $I$  enrollados formando bobinas y solenoides. También debemos mencionar que el campo magnético es totalmente diferente al campo eléctrico, ya que las líneas de campo magnético  $\vec{B}$  son líneas siempre cerradas, lo cual indica que no existen monopolos magnéticos, por lo tanto, la entidad más pequeña es el dipolo magnético; en cambio las líneas de campo eléctrico  $\vec{E}$  son líneas que divergen desde la carga o convergen a la carga (la fuente o la causa) que genera el campo eléctrico. En este caso decimos que existe un monopolo eléctrico (la carga  $q$ ). Microscópicamente, las fuentes del campo magnético vienen dadas por los momentos orbitales de los electrones y por sus propiedades de espín. En lo que sigue, sólo consideraremos fuentes macroscópicas del campo magnético.

#### 2.- Fuerza magnética sobre una partícula cargada.

Consideremos una región libre de campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . En esta región se envía una partícula con carga  $q$  con velocidad  $\vec{v}$ , en dos direcciones distintas del espacio, las cuales hacen un ángulo  $\theta < 180^\circ$ . Si la partícula no se desvía en ninguna de las dos direcciones,

### 2.2.7 Unidad IV: Magnetismo

podemos afirmar que en esa región no existe campo magnético  $\vec{B}$ . Por el contrario, si la partícula se desvía, podemos afirmar que existe un campo magnético  $\vec{B}$  que actúa sobre la partícula y que la desvía con una fuerza magnética  $\vec{F}_m$ . Experimentalmente,  $\vec{F}_m$  viene dada por

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.1)$$

La unidad de medida del campo magnético  $B$  viene dada por

$$[B] = \left[ \frac{Ns}{Cm} \right] = \left[ \frac{N}{Am} \right] = [T] \quad (4.2)$$

donde  $T$  es la unidad de medida del campo magnético llamada Tesla,  $N$  es el Newton (fuerza),  $A$  es el Ampere (corriente eléctrica) y  $[m]$  es la unidad de longitud en metros. Otra unidad de medida de campo magnético que a veces se usa es el Gauss ( $[G]$ ), que se relaciona con el Tesla de la siguiente manera:  $1[T] = 10^4[G]$ . Por ejemplo, el valor aproximado del campo magnético en la superficie de la tierra viene dado por  $B_{terrestre} = 0.5 \times 10^{-4}[T] = 0.5[G]$ .

El producto cruz entre vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ , viene dado por  $(\vec{v} \times \vec{B}) = |\vec{v}| |\vec{B}| \sin \theta \hat{e}_\perp$ , donde  $\theta$  es el menor ángulo entre los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ . El vector  $\hat{e}_\perp$  es un vector unitario perpendicular al plano formado por estos dos vectores, y sigue *la regla de la mano derecha*. Usando esta definición geométrica, el producto cruz se puede expresar a través de un determinante. Si cada vector viene dado en la forma cartesiana general

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \\ \vec{B} &= B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \end{aligned} \quad (4.3)$$

El producto cruz se obtiene a través del determinante

$$(\vec{v} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

usando la expansión de Laplace del determinante, se obtiene

$$(\vec{v} \times \vec{B}) = \hat{i}(v_y B_z - v_z B_y) - \hat{j}(v_x B_z - v_z B_x) + \hat{k}(v_x B_y - v_y B_x) \quad (4.5)$$

En consecuencia, tenemos dos formas de calcular la fuerza magnética  $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$ .

## 3.- Trabajo de la fuerza magnética.

El trabajo  $W_m$  producido por la fuerza magnética  $\vec{F}_m$  sobre una partícula cargada en movimiento viene dado por

$$W_m = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{l} \quad (4.6)$$

donde  $d\vec{l}$  es un vector diferencial tangente a la curva trayectoria. Por otra parte, la velocidad instantánea  $\vec{v}$  de la partícula en su trayectoria viene dada por  $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ , por lo tanto,  $d\vec{l}$  puede ser expresado como  $d\vec{l} = \vec{v} dt$ . Reemplazando esta relación en (4.6), el trabajo magnético viene dado por

$$W_m = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{l} = \int \vec{F}_m \cdot \vec{v} dt \quad (4.7)$$

Usando la expresión (4.1) de la fuerza magnética, podemos escribir

$$W_m = \int q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \quad (4.8)$$

El producto vectorial mixto  $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$  se puede reescribir usando las propiedades vectoriales en la siguiente forma. Usando conmutatividad del producto punto, se tiene

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.9)$$

luego cambiamos el punto por la cruz y el producto mixto no cambia,

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = (\vec{v} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} \quad (4.10)$$

Pero, el producto cruz de dos vectores paralelos siempre es cero, ya que  $(\vec{v} \times \vec{v}) = v v \sin 0^\circ = 0$ . En conclusión, el producto vectorial mixto  $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$  contenido en la expresión del trabajo magnético  $W_m$  vale cero y por lo tanto, el trabajo magnético siempre es cero, y por lo tanto no cambia su energía,

$$W_m = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.11)$$

Esto significa que el campo magnético sólo puede cambiar la trayectoria de la partícula cargada  $q$ .

### 2.2.7 Unidad IV: Magnetismo

Ya vimos que un campo magnético  $\vec{B}$  ejerce una fuerza desviadora sobre una carga  $q$  que se mueve con velocidad instantánea  $\vec{v}$ . Veamos ahora qué le ocurre a un alambre con corriente  $I$  puesto en una región donde existe un campo magnético  $\vec{B}$ .

Al interior del alambre con corriente, las cargas eléctricas se mueven con velocidad constante  $\vec{v}_d$  (velocidad de arrastre). Consideremos un trozo de alambre de largo diferencial  $dl$ . Cada portador de carga siente una fuerza magnética desviadora  $\vec{F}_m = q(\vec{v}_d \times \vec{B})$ . Dependiendo del tipo de material del alambre sobre el cual se establece la corriente eléctrica  $I$ , existe un número  $N$  de portadores de carga por unidad de volumen. En un alambre cilíndrico con área de sección transversal  $A$  y largo diferencial  $dl$ , el volumen diferencial viene dado por  $dV = A dl$ . Por lo tanto, el número total de cargas  $dq$  o de portadores de carga disponibles en el volumen diferencial  $dV$ , viene dado por

$$dq = Nq dV = NqA dl \quad (4.12)$$

Sobre cada uno de los portadores de carga se ejerce una fuerza  $\vec{F}_m$ . En consecuencia, la fuerza magnética total  $d\vec{F}_m$  (diferencial) o la fuerza magnética resultante sobre el trozo de alambre con corriente  $I$ , viene dada por

$$d\vec{F}_m = dq(\vec{v}_d \times \vec{B}) \quad (4.13)$$

Usando (4.12) se tiene

$$d\vec{F}_m = NqA dl(\vec{v}_d \times \vec{B}) \quad (4.14)$$

Pero los vectores  $\vec{v}_d$  y  $d\vec{l}$  son vectores paralelos, por lo tanto podemos escribir

$$dl \vec{v}_d = v_d d\vec{l} \quad (4.15)$$

Usando esta propiedad podemos reescribir la relación (4.14) en la forma

$$d\vec{F}_m = NqA v_d (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (4.16)$$

Pero de acuerdo a la Unidad III, la corriente eléctrica  $I$  en el trozo de alambre en estudio, viene dada por

$$I = NqA v_d \quad (4.17)$$

por lo tanto, la expresión (4.16) queda finalmente como

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (4.18)$$

Sumando todas estas fuerzas magnéticas diferenciales sobre un alambre de largo finito, obtenemos la fuerza magnética  $\vec{F}_m$  sobre un alambre con corriente  $I$

$$\vec{F}_m = \int_a^b I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (4.19)$$

#### 4.- Ley de Biot y Savart.

En esta sección estudiaremos la manera de calcular el campo magnético a partir de una de sus fuentes macroscópicas: la corriente eléctrica  $I$ . Históricamente se descubrió el efecto desviador producido por un alambre con corriente sobre una brújula magnética y también sobre un imán. Estudios experimentales más refinados permitieron obtener el valor del campo magnético vectorial  $\vec{B}$  generado por un alambre con corriente eléctrica  $I$ . Vemos así que la fuente (la causa) que genera el campo magnético  $\vec{B}$  es la corriente eléctrica  $I$ , es decir, cargas eléctricas en movimiento. Por comparación, recordemos que la fuente (la causa) que genera el campo eléctrico  $\vec{E}$  es la carga  $q$ , tal como vimos en el capítulo 1.

Consideremos un trozo de alambre con corriente  $I$ , cuya ubicación, respecto al origen de un sistema de referencia  $O$ , se muestra en la Fig. 4.1.

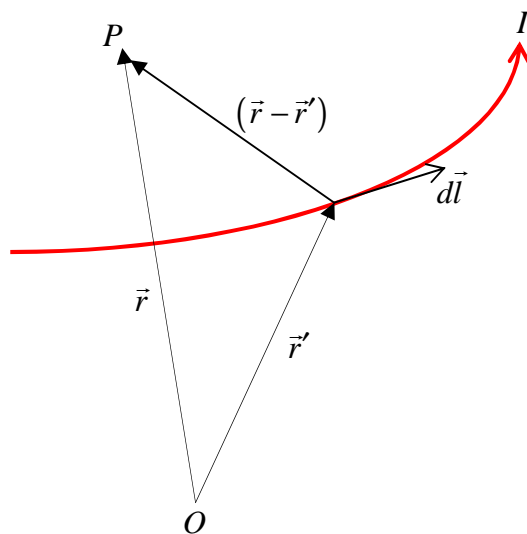


Figura 4.1 Campo Magnético  $\vec{B}$  creado por un alambre con corriente eléctrica  $I$  en el punto  $P$ .

En la Fig. 4.1,  $d\vec{l}$  es un diferencial vectorial que apunta en dirección tangente al alambre y en el sentido que circula la corriente eléctrica  $I$ . El vector  $\vec{r}$  indica la posición del punto

### 2.2.7 Unidad IV: Magnetismo

fijo  $P$  respecto del origen  $O$  donde queremos medir el campo magnético  $\vec{B}$ . El vector  $\vec{r}'$  indica la posición del vector diferencial  $d\vec{l}$  respecto del origen  $O$ . Nótese que  $\vec{r}$  no varía durante el cálculo del campo  $\vec{B}$ , en cambio, el vector  $\vec{r}'$  varía sobre todo el alambre con corriente. *Experimentalmente* se demuestra que a partir de este esquema, el diferencial de campo magnético  $d\vec{B}$  generado por una corriente eléctrica  $I$  viene dado por la ley de Biot-Savart,

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.20)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío y vale  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left( \frac{Tm}{A} \right)$ . Usando el

Principio de Superposición, el campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$  resultante se obtiene por integración sobre la variable  $l$ , la cual está relacionada con la variable  $r'$  que indica la posición de  $d\vec{l}$  en el alambre. El vector  $\vec{r}$  es un parámetro fijo, ya que el punto de observación  $P$  está fijo respecto al observador en el origen  $O$ . El campo magnético resultante viene dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.21)$$

Esta fórmula matemática tiene una forma similar a la expresión que permite calcular el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  usando la ley de Coulomb. Ambos campos dependen del inverso de

la distancia cuadrática  $\left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right)$  desde la fuente que crea el campo (carga  $q$  para campo

eléctrico y corriente eléctrica  $I$  para el campo magnético) hasta el punto de observación  $P$  del campo.

En conclusión, la ley de Biot-Savart nos indica que todo alambre con corriente eléctrica  $I$  (y también cargas en movimiento) genera un campo magnético  $\vec{B}$  en su vecindad. Usando diferentes configuraciones de alambres con corriente  $I$  se pueden obtener dispositivos que producen diferentes formas de campos magnéticos, así por ejemplo, alambres enrollados con corriente generan un sistema llamado bobina y solenoide que permite almacenar campo magnéticos y ser usado en circuitos eléctricos para desarrollos tecnológicos.



### 5.- Ley de Ampere

Usando la ley de Biot-Savart alrededor de un alambre largo, y a su vez haciendo experimentos muy sencillos, se llega a la conclusión de que las líneas de campo magnético forman circunferencias alrededor del alambre con corriente, es decir, las líneas de campo magnético son líneas cerradas, tal como se muestra en la Fig. 4.2. La dirección del campo magnético  $\vec{B}$  alrededor del alambre se obtiene a través de la regla de la mano derecha.

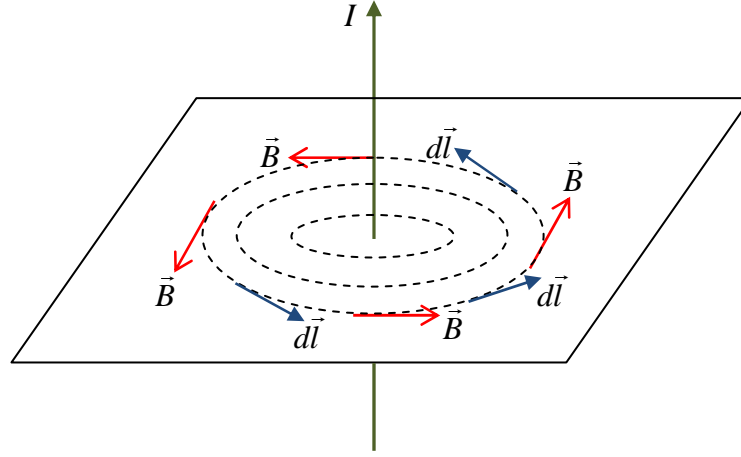


Figura 4.2 Líneas de campo magnético  $\vec{B}$  creadas por alambre con corriente  $I$ .

Esto significa que las líneas de campo magnético no emanan de un único punto o no llegan a un único punto, tal como ocurre en el caso del campo eléctrico. Por eso decimos que no existen monopolos magnéticos. Si tomamos la divergencia de la ecuación (4.21) se demuestra, después de un desarrollo algebraico, que se cumple la siguiente ecuación,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.22)$$

Esta ecuación es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell. Por otra parte, si tomamos la integral de volumen de esta expresión

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \quad (4.23)$$

y usando el teorema matemático de Gauss, se tiene

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.24)$$

donde  $S$  indica la superficie que encierra al volumen  $V$ . La forma integral de la ecuación de Maxwell viene dada por,

### 2.2.7 Unidad IV: Magnetismo

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.25)$$

La integral cerrada mide *el flujo* del campo magnético  $\vec{B}$  a través de la superficie cerrada. Este flujo siempre es cero, lo cual significa que la proyección del campo magnético  $\vec{B}$  sobre la diferencial de superficie  $d\vec{S}$  contribuye en cantidades positivas y negativas, siempre en la misma cantidad, independientemente de la superficie en estudio. Es decir, las líneas de campo  $\vec{B}$  entran y salen de la superficie en igual proporción. Esta es la manifestación de la inexistencia de monopolos magnéticos.

Para obtener la ley de Ampere, midamos todas las contribuciones del campo  $\vec{B}$  alrededor de la trayectoria cerrada circunferencial,  $\Gamma$ , centrada en el alambre recto muy largo con corriente  $I$ , como se muestra en la Fig. 4.2. Estas contribuciones las mediremos a través del producto punto  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ , donde  $d\vec{l}$  es el vector diferencial tangente a la circunferencia centrada en el alambre con corriente. La contribución total se obtiene calculando la integral cerrada de línea,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (4.26)$$

Sobre una circunferencia de radio  $r$  fijo, se cumple que  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = Bdl$ , porque  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  son paralelos en cada punto de la trayectoria circunferencial y además  $B$  es constante sobre la circunferencia. La integral (4.26), queda

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint Bdl = B \oint dl \quad (4.27)$$

La integral cerrada mide el perímetro de la circunferencia,  $\oint dl = 2\pi r$ . Usando la ley de Biot-Savart se demostró que la magnitud del campo magnético  $B$  alrededor de un alambre recto muy largo viene dada por  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ . Reemplazando este valor en relación (4.27), se tiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) (2\pi r) \quad (4.28)$$

simplificando obtenemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (4.29)$$

Este resultado se obtuvo para el caso particular de un alambre recto muy largo con corriente  $I$ . Sin embargo, *experimentalmente* se cumple que cuando una trayectoria cerrada arbitraria  $\Gamma$  es atravesada por una corriente estable  $I$ , se cumple la siguiente relación general,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (4.30)$$

donde  $I = I_{\text{net encerrada}}$  representa la corriente total encerrada por la curva cerrada  $\Gamma$  (curva

Amperiana). Esta es la llamada ley de Ampere.

Usando el teorema de Stokes, esta ley se puede escribir en forma diferencial

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I \quad (4.31)$$

donde  $d\vec{S}$  es el vector diferencial que sale de la superficie que es limitada por la curva Amperiana  $\Gamma$ . Por otra parte, la corriente que atraviesa la superficie  $S$  limitada por la Amperiana  $\Gamma$ , se puede escribir en la forma  $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ , donde  $\vec{J}$  es la densidad de

corriente por unidad de área que estudiamos en la Unidad III. Reemplazando en (4.31), se tiene

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.32)$$

dado que la superficie  $d\vec{S}$  es arbitraria, se cumple que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (4.33)$$

Esta es la forma diferencial de la ley de Ampere (4.30). Esta no es una ecuación de Maxwell, dado que no toma en cuenta la variación de los campos eléctricos en el tiempo

$\left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ . La generalización de esta ley viene dada por

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.34)$$

El último término de la derecha fue obtenido por Maxwell. Esta ley se denomina ley de Ampere-Maxwell y fue fundamental para el desarrollo de la física electromagnética.

## 2.2.7 Unidad IV: Magnetismo

### 6.- Inducción Electromagnética.

Trabajos experimentales realizados durante el siglo XIX permitieron establecer que la variación del flujo magnético  $\Phi_B$  a través de una superficie abierta producía una fuerza electromotriz (Fem  $\mathcal{E}$ ) inducida. También podemos decir que la variación del flujo produce una diferencia de potencial no-conservativa y que incluso puede producir una corriente eléctrica  $I$  inducida si el flujo varía sobre un circuito cerrado. Este comportamiento del flujo magnético es absolutamente distinto de los otros comportamientos magnéticos descritos a través de las leyes anteriormente vistas. Recordemos que el flujo  $\Phi$  de un vector cualquiera  $\vec{A}$  a través de una superficie  $S$ , se define como

$$\Phi_A = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (4.35)$$

Si la superficie es cerrada, entonces el flujo sobre la superficie cerrada viene dado por

$$\Phi_A = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (4.36)$$

Si ahora consideramos el flujo del vector campo magnético  $\vec{B}$ , entonces, el flujo a través de una superficie cerrada vale cero siempre,

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.37)$$

tal como lo vimos en ecuación (4.25). También dijimos que este comportamiento es absolutamente general y que este resultado constituía una de las ecuaciones de Maxwell, que en su forma diferencial viene dada por  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , y que representa la inexistencia de los monopolos magnéticos. El flujo magnético a través de una superficie cerrada  $\Phi_B$  es muy distinto al flujo eléctrico a través de una superficie cerrada  $\Phi_E$ , ya que para el caso eléctrico, el flujo a través de una superficie cerrada da origen a la ley de Gauss,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \quad (4.38)$$

Este comportamiento es una indicación de las diferencias fundamentales entre los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$

Volvamos ahora al comportamiento del campo magnético  $\vec{B}$ . El flujo magnético sobre una superficie abierta no tiene ninguna restricción y viene dado por

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.39)$$

Este flujo puede variar en el tiempo por varias razones: a) por variación de  $\vec{B}$  en el tiempo, b) por variación de la superficie, c) por movimiento de la superficie, d) por varios de los casos anteriores. Experimentalmente, se ha llegado a la conclusión de que la variación en el tiempo del flujo magnético a través de una superficie abierta, se convierte en una fuente de fuerza electromotriz (Fem  $\mathcal{E}$ ). La nueva ley experimental se denomina ley de Faraday-Lenz y la Fem inducida viene dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.40)$$

El signo menos se asocia con la propiedad de la naturaleza de oponerse a cualquier variación del flujo magnético. Normalmente a  $\mathcal{E}$  se la llama Fem inducida. La Fem inducida es capaz de establecer un campo eléctrico inducido en una región libre de conductores metálicos (las ondas electromagnéticas en el vacío son un claro ejemplo de este comportamiento), y también es capaz de producir corriente eléctrica inducida si hay conductores formando circuitos cerrados. Cuando usamos la palabra *inducido* o *inducida*, no significa que las consecuencias no sean reales, sino que con estas palabras se indica el método mediante el cual se generó la Fem o la corriente eléctrica o el campo eléctrico. Debemos enfatizar que la ley de Faraday-Lenz (4.40) es una ley experimental totalmente independiente de las otras leyes asociadas al campo magnético.

En la ecuación (3.64) de la Unidad III vimos que la Fem  $\mathcal{E}$  viene definida a través de la siguiente expresión general

$$\mathcal{E} \equiv \oint (\vec{E}_c + \vec{E}_{nc}) \cdot d\vec{l} \quad (4.41)$$

separando las integrales, se tiene,

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} \quad (4.42)$$

pero  $\mathcal{E} = \oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$ , porque se trata del campo electrostático, el cual es un campo conservativo. Esta integral mide la diferencia de potencial entre dos puntos idénticos, es decir,  $\mathcal{E} = \oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = V_a - V_a = 0$ . Por lo tanto, la Fem (4.41), queda expresada sólo en función de los campos eléctricos no-conservativos, tal como los campos eléctricos inducidos por la variación del flujo magnético a través de la ley de Faraday-Lenz,

### 2.2.7 Unidad IV: Magnetismo

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} \quad (4.43)$$

Reemplazando (4.39) y (4.43) en la ley de Faraday-Lenz (4.40), se tiene

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} \quad (4.44)$$

Para el caso de un circuito rígido y estacionario, la derivada temporal puede ingresar en la integral como una derivada parcial

$$\oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.45)$$

En la ecuación (1.64) de la Unidad I mostramos la aplicación del teorema de Stokes para cualquier campo vectorial  $\vec{E}$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (4.46)$$

donde  $\Gamma$  es una curva general que limita a una superficie arbitraria  $S$ . Aplicando este teorema a la parte izquierda de la ecuación (4.45), se tiene,

$$\oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}_{nc}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.47)$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}_{nc}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.48)$$

Dado que esta igualdad debe valer para cualquier superficie  $S$ , se debe cumplir que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{nc} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.49)$$

Dado que para esta ley sólo contribuyen los campos eléctricos inducidos no-conservativos  $\vec{E}_{nc}$ , podemos usar por simplicidad de lenguaje la notación  $\vec{E}_{nc} = \vec{E}$ , por lo tanto, la forma diferencial de la ley de Faraday-Lenz viene dada por

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.50)$$

Esta es la última de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

En resumen, y tal como dijimos en la Unidad I, la expresión de la divergencia y el rotor de cada campo constituye un conjunto de cuatro ecuaciones que se denominan *Ecuaciones de Maxwell*, y que *experimentalmente* vienen dadas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.51)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales lineales (vale el Principio de Superposición) constituye una notable generalización experimental. En estas ecuaciones,  $\vec{J}$  es la densidad de corriente eléctrica, y  $\rho$  es la densidad volumétrica de carga eléctrica. Nótese que los campos eléctrico y magnético están *indisolublemente* unidos a través de las ecuaciones diferenciales (4.51) y dan origen al llamado *campo electromagnético*. Todo el electromagnetismo está descrito por las ecuaciones de Maxwell (4.51), junto con la fuerza de Lorentz  $\vec{F}_L$

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.52)$$

y con la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (4.53)$$





## Equation Section (Next)

**2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos**

En esta sección se hace una aplicación de las leyes dinámicas y estáticas del magnetismo, a través de la resolución de problemas. Se emplean variadas distribuciones de corriente eléctrica para generar campos magnéticos, y a su vez se estudian varias situaciones teóricas que permiten comprender la generación de Fem inducidas y corrientes inducidas.

1.- Hallar el campo magnético vectorial en el origen  $O$  del sistema de coordenadas, producido por un alambre con corriente  $I$  formado por segmentos rectos de largo  $L$ , y un segmento vertical de largo  $2a$  que está separado del origen una distancia  $D$ , tal como se muestra en la Fig. 1.1

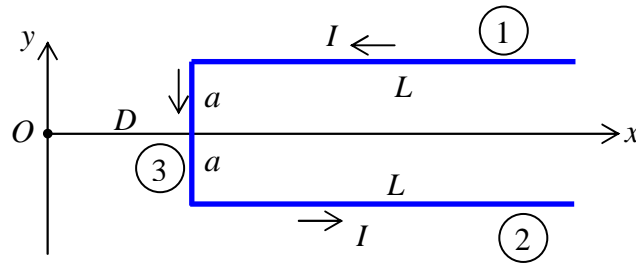


Figura 1.1 Campo magnético creado por un alambre con corriente  $I$ , en el origen  $O$ .

**Solución:**

Los alambres horizontales los numeramos 1 y 2 y el alambre vertical lo numeramos 3.

Alambre 1: (horizontal superior)

Los vectores posición del punto de observación del campo magnético  $\vec{r}$  y de la posición de la corriente  $\vec{r}'$ , con respecto al origen  $O$  del sistema de coordenadas, y las relaciones entre ellos vienen dados por,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{0}, \\ \vec{r}' &= x\hat{i} + a\hat{j}, \\ (\vec{r} - \vec{r}') &= -x\hat{i} - a\hat{j}, \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{x^2 + a^2}\end{aligned}\tag{1.1}$$

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

Recordemos que en la ley de Biot-Savart,  $d\vec{l}$  siempre apunta en la dirección de la corriente eléctrica, luego,

$$d\vec{l} = -d\vec{r}' = -dx\hat{i} \quad (1.2)$$

Aplicando Biot-Savart, se tiene

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_D^{D+L} \frac{dx\hat{i} \times (-x\hat{i} - a\hat{j})}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_D^{D+L} \frac{dx\hat{i} \times (-x\hat{i} - a\hat{j})}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.3)$$

pero,  $\hat{i} \times (-x\hat{i} - a\hat{j}) = -a(\hat{i} \times \hat{j}) = -a\hat{k}$ , ya que  $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{0}$ . Por lo tanto, (1.3), queda

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_D^{D+L} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (1.4)$$

integrando, obtenemos

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \frac{(D+L)}{\sqrt{(D+L)^2 + a^2}} - \frac{D}{\sqrt{D^2 + a^2}} \right\} \hat{k} \quad (1.5)$$

Por simetría de los alambres horizontales, los campos magnéticos producidos por ambos alambres son iguales, es decir,

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 \quad (1.6)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \frac{(D+L)}{\sqrt{(D+L)^2 + a^2}} - \frac{D}{\sqrt{D^2 + a^2}} \right\} \hat{k} \quad (1.7)$$

Alambre 3: (vertical)

En este caso, los vectores que se necesitan para la aplicación de la ley de Biot-Savart son

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{0}, \\ \vec{r}' &= D\hat{i} + y\hat{j}, \\ (\vec{r} - \vec{r}') &= -D\hat{i} - y\hat{j}, \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{D^2 + y^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Reemplazando en Biot-Savart, tenemos

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{-dy \hat{j} \times (-D\hat{i} - y\hat{j})}{(D^2 + y^2)^{3/2}} \quad (1.9)$$

pero,  $\hat{j} \times (-D\hat{i} - y\hat{j}) = -D(\hat{j} \times \hat{i}) = -D(-\hat{k}) = D\hat{k}$ , y además  $\hat{j} \times \hat{j} = \hat{0}$ , luego (1.9) queda,

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 ID}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy}{(D^2 + y^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (1.10)$$

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi D} \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}} \Big|_{-a}^a \hat{k} \quad (1.11)$$

Finalmente,  $\vec{B}_3(\vec{r})$  viene dada por

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi D \sqrt{D^2 + a^2}} \hat{k} \quad (1.12)$$

El campo resultante viene dado por  $\vec{B}_R = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$ , pero por resultado (1.6), se tiene,

$$\vec{B}_R = 2(\vec{B}_1) + \vec{B}_3$$

$$\vec{B}_R = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \frac{(D+L)}{\sqrt{(D+L)^2 + a^2}} - \frac{D}{\sqrt{D^2 + a^2}} \right\} \hat{k} - \frac{\mu_0 Ia}{2\pi D \sqrt{D^2 + a^2}} \hat{k} \quad (1.13)$$

Finalmente, el campo resultante creado por el alambre con corriente viene dado por

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{(D+L)}{a\sqrt{(D+L)^2 + a^2}} - \frac{D}{a\sqrt{D^2 + a^2}} - \frac{a}{D\sqrt{D^2 + a^2}} \right\} \hat{k} \quad (1.14)$$

2.- Hallar el campo magnético creado en el punto  $P$ , por la distribución de corriente formada por dos alambres rectos semi-infinitos y un alambre semicircular que se muestra en la Fig. 2.1.

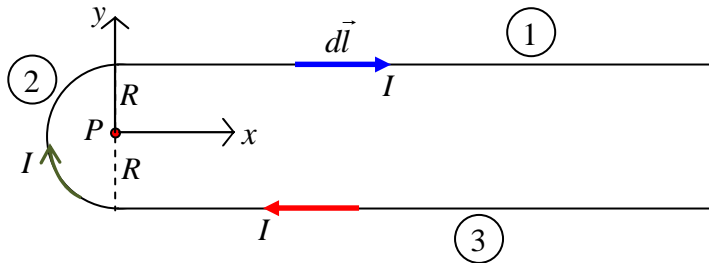


Figura 2.1 Campo magnético creado en el punto  $P$  por un alambre con corriente  $I$ .

## 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

### Solución:

Consideremos un sistema de referencia con origen en el punto  $P$  como se muestra en la Fig. 2.1, donde el eje  $z$  sale perpendicularmente de la página. El problema puede ser separado en tres partes, de modo de considerar por separado la contribución de cada trozo de alambre, tal como se indica en la Fig. 2.1, a través de los números. Por la simetría del problema, la contribución de los alambres rectos semi-infinitos es la misma, por ello sólo calcularemos el alambre 1 y consideraremos que  $\vec{B}_1 = \vec{B}_3$  y el campo resultante vendrá dado por:

$$\vec{B}_R = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = 2\vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (15)$$

Aplicaremos la ley de Biot-Savart para calcular el campo magnético en cada sección del alambre

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (16)$$

Cálculo del campo magnético  $\vec{B}_1$ , creado por el alambre horizontal superior.

En este caso los vectores vienen dados por:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{0}, \\ \vec{r}' &= x\hat{i} + R\hat{j}, \\ d\vec{l} &= d\vec{r}' = dx\hat{i} \end{aligned} \quad (17)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= -x\hat{i} - R\hat{j}, \\ |\vec{r} - \vec{r}'|^3 &= (x^2 + R^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (18)$$

y para los productos cruz, se tiene

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = dx\hat{i} \times (-x\hat{i} - R\hat{j}) = Rdx(-\hat{k}) \quad (19)$$

Reemplazando en la ley de Biot-Savart, tenemos:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{-Rdx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (20)$$

$$\vec{B}_1 = -\hat{k} \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{1}{R^2} \left. \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right|_0^\infty \quad (21)$$

finalmente, se tiene

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \hat{k} \quad (22)$$

Cálculo del campo magnético  $\vec{B}_2$ , creado por el alambre semi-circunferencial vertical.

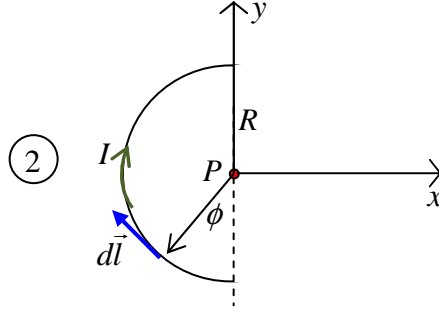


Figura 2.2 Campo magnético creado en el punto  $P$  por la sección semi-circunferencial del alambre con corriente  $I$ .

Mirando la Fig. 2.2, vemos que en este caso los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{0}, \\ \vec{r}' &= -R \sin \phi \hat{i} - R \cos \phi \hat{j} \end{aligned} \quad (23)$$

El vector diferencial  $d\vec{l}$  viene dado por

$$d\vec{l} = d\vec{r}' = -R \cos \phi d\phi \hat{i} + R \sin \phi d\phi \hat{j} \quad (24)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= R \sin \phi \hat{i} + R \cos \phi \hat{j}, \\ |\vec{r} - \vec{r}'|^3 &= R^3 \end{aligned} \quad (25)$$

y el producto cruz  $d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')$  que aparece en la ley de Biot-Savart, se expresa

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = (-R \cos \phi d\phi \hat{i} + R \sin \phi d\phi \hat{j}) \times (R \sin \phi \hat{i} + R \cos \phi \hat{j}) \quad (26)$$

También se puede obtener el producto cruz por medio del determinante,

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \cos \phi d\phi & R \sin \phi d\phi & 0 \\ R \sin \phi & R \cos \phi & 0 \end{vmatrix} \quad (27)$$

Haciendo la expansión de Laplace del determinante, se obtiene

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = -R^2 d\phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \hat{k} \quad (28)$$

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = -R^2 d\phi \hat{k} \quad (29)$$

Reemplazando en la ley de Biot-Savart, tenemos:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \frac{-R^2 d\phi}{R^3} \hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi d\phi \hat{k} \quad (30)$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k} \quad (31)$$

El campo magnético resultante en el punto  $P$  está dado por

$$\vec{B}_R = 2\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{2\mu_0 I}{4\pi R} \hat{k} - \frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k} \quad (32)$$

Finalmente, el campo magnético resultante en el punto  $P$ , viene dado por

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0 I}{4R} \left( \frac{2}{\pi} + 1 \right) (-\hat{k}) \quad (33)$$

El signo menos indica que el campo magnético resultante apunta en la dirección negativa del eje  $z$ , es decir, en este caso, entrando en la página.

3.- Dos espiras de radios  $a$  y  $b$  respectivamente, con  $b < a$ , están colocadas en forma perpendicular a un eje común. Las espiras portan corrientes estables  $I_1$  e  $I_2$  en distintos sentidos sobre cada espira, y sus centros están separados una distancia  $L$ , tal como se muestra en la Fig. 3.1.

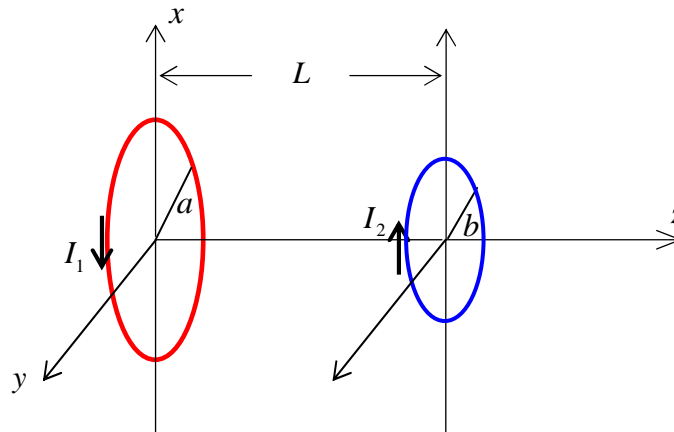


Figura 3.1 Campo magnético creado por espiras circulares con corriente que giran en distintos sentido.

- a) Encuentre una expresión para el campo magnético resultante  $\vec{B}_R(z)$  a lo largo del eje  $z$ .
- b) Suponga que es posible regular la corriente  $I_2$  en la espira de radio  $b$ . Encuentre el valor de  $I_2$  para que  $\vec{B}_R(z)$ , en  $z = \frac{L}{2}$ , sea igual a cero.

**Solución:**

a) Calcular el campo magnético producido por las dos espiras.

En primer lugar, calculemos el campo magnético creado por una espira de radio  $R$ , en el punto  $P$ , a una altura  $z$  sobre su plano.

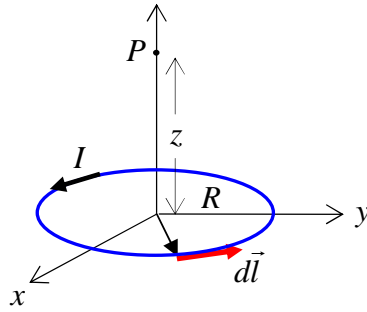


Figura 3.2 Campo magnético creado en el eje de la espira circular con corriente  $I$ .

El origen del sistema de referencia lo ponemos justo en el centro de la espira de radio  $R$ . De la figura vemos que

$$\begin{aligned}\vec{r} &= z\hat{k}, \\ \vec{r}' &= R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}\end{aligned}\tag{34}$$

con estos valores calculamos,

$$\begin{aligned}(\vec{r} - \vec{r}') &= -R\cos\theta\hat{i} - R\sin\theta\hat{j} + z\hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{R^2 + z^2}\end{aligned}\tag{35}$$

Además sabemos que  $d\vec{l} = d\vec{r}'$ ,

$$d\vec{l} = d\vec{r}' = -R\sin\theta d\theta\hat{i} + R\cos\theta d\theta\hat{j}\tag{36}$$

donde,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

La diferencial de campo magnético viene dado por la ley de Biot-Savart:

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (37)$$

Usemos la forma del determinante para calcular el producto cruz:

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin \theta d\theta & R \cos \theta d\theta & 0 \\ -R \cos \theta & -R \sin \theta & z \end{vmatrix} \quad (38)$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \hat{i} z R \cos \theta d\theta - \hat{j} z R \sin \theta d\theta + \hat{k} R^2 d\theta \quad (39)$$

Reemplazando en la relación (37), se tiene

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\hat{i} z R \cos \theta d\theta - \hat{j} z R \sin \theta d\theta + \hat{k} R^2 d\theta)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (40)$$

Al integrar se eliminan las componentes x e y del campo magnético, ya que se anulan las integrales sobre el ángulo  $\theta$ , esto es,  $\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$ . En consecuencia, el campo magnético resultante apunta sólo a lo largo del eje  $z$ .

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (41)$$

Al variar el ángulo  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$  recorremos toda la espira. Sin embargo, cuando esto ocurre no varía  $z$  ni  $R$ , por lo tanto, el campo magnético  $\vec{B}(z)$  creado por la espira apunta en la dirección del eje  $z$ , y viene dado por:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (42)$$

Nótese que el campo magnético creado por la espira a lo largo de su eje  $z$  apunta siempre hacia arriba, según la figura 3.2. Es decir, si medimos el campo magnético creado por la espira para valores negativos de  $z$ , el campo de la espira sigue apuntando hacia arriba.

Caso particular. En el centro de la espira, es decir, para  $z = 0$ , el campo magnético viene dado por

$$\vec{B}(z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{k} \quad (43)$$



Cálculo del campo magnético resultante creado por las dos espiras.

Ahora aplicamos el resultado general (42) a cada una de las dos espiras, suponiendo que el punto  $P$  de observación del campo magnético se encuentra a la derecha de las dos espiras y a una distancia  $z$  del origen, ubicado justo en el centro de la espira de radio  $a$ .

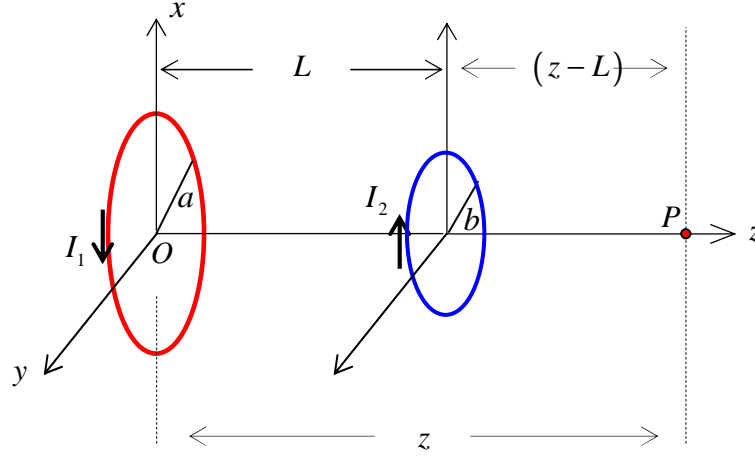


Figura 3.3 Campo magnético creado en el punto  $P$  por dos espiras con corriente que giran en distintos sentidos.

La espira de la izquierda tiene radio  $R = a$  y corriente eléctrica  $I_1$ . De acuerdo a la expresión general dada por la relación (42), el campo magnético  $\vec{B}_1(z)$ , a una distancia  $z$  sobre el centro de la espira, viene dado por,

$$\vec{B}_1(z) = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (44)$$

La espira más pequeña ubicada a la derecha tiene un radio  $R = b$  y lleva una corriente  $I_2$ . El campo magnético  $\vec{B}_2(z)$  debe ser medido a una distancia  $(z - L)$  de su propio plano, por lo tanto,

$$\vec{B}_2(z) = \frac{\mu_0 I_2 b^2}{2(b^2 + (z - L)^2)^{3/2}} (-\hat{k}) \quad (45)$$

Hemos colocado un signo negativo para el vector unitario  $\hat{k}$ , porque el campo  $\vec{B}_2(z)$  apunta en la dirección negativa del eje  $z$ . El campo  $\vec{B}_2(z)$  siempre apunta en la dirección negativa del eje  $z$ , ya sea que midamos el campo magnético a la derecha o a la izquierda

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

de la espira pequeña. Por lo tanto, los campos  $\vec{B}_1$  y  $\vec{B}_2$  apuntan en distintos sentidos sobre el eje  $z$ . El campo resultante  $\vec{B}_R(z)$  de las dos espiras viene dado por la suma vectorial de los campos:

$$\vec{B}_R(z) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (46)$$

Explícitamente:

$$\vec{B}_R(z) = \frac{\mu_0}{2} \left[ \frac{I_1 a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{I_2 b^2}{(b^2 + (z-L)^2)^{3/2}} \right] \hat{k} \quad (47)$$

b) Cálculo de la corriente  $I_2$  para lograr que en  $z = \frac{L}{2}$  se anule el campo resultante.

Si el punto de observación del campo magnético está entre medio de las dos espiras, en  $z = \frac{L}{2}$ , entonces, el campo resultante  $B_R(z)$ , queda,

$$\vec{B}_R(z = \frac{L}{2}) = \frac{\mu_0}{2} \left[ \frac{I_1 a^2}{\left(a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{I_2 b^2}{\left(b^2 + \left(\frac{L}{2} - L\right)^2\right)^{3/2}} \right] \hat{k} \quad (48)$$

Exigimos que se cumpla la condición  $\vec{B}_R\left(z = \frac{L}{2}\right) = 0$ , es decir,

$$\frac{I_1 a^2}{\left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}} - \frac{I_2 b^2}{\left(b^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}} = 0 \quad (49)$$

Despejando, obtenemos finalmente el valor de la corriente  $I_2$  para la cual el campo magnético se anula en el punto medio entre las espiras,

$$I_2 = I_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{4b^2 + L^2}{4a^2 + L^2}\right)^{3/2} \quad (50)$$

4.- a) Hallar el campo magnético  $\vec{B}$  en el punto  $P$ , producido por el alambre que lleva una corriente constante  $I$ . El alambre está formado por dos alambres rectos semi-infinitos y una semi-circunferencia de radio  $R$ . b) Encuentre el valor del campo magnético  $\vec{B}$  si  $h \rightarrow 0$ .

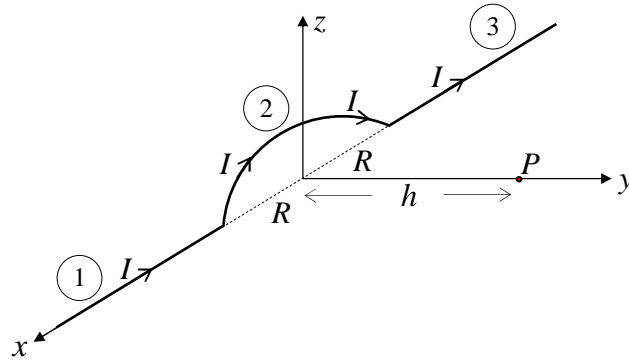


Figura 4.1 Campo magnético creado por alambre con corriente  $I$ .

**Solución:**

Hemos marcado cada trozo de alambre con un número. Calcularemos primero el campo magnético producido por los alambres semi-infinitos 1 y 3. Por simetría, los campos de cada alambre son los mismos en el punto  $P$ , es decir,  $\vec{B}_1 = \vec{B}_3$ , así que basta calcular uno sólo de ellos.

Campo producido por el alambre 3.

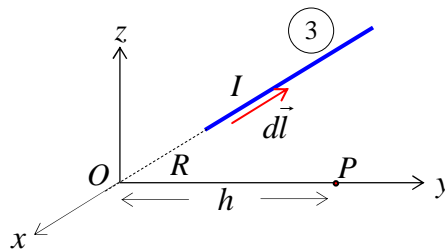


Figura 4.2 Campo magnético creado por un alambre con corriente recto y semi-infinito.

Considerando el origen  $O$  del sistema de coordenadas en el centro de la semi-circunferencia de la Fig. 4.1, y tal como se indica en la Fig. 4.2, los vectores que definen al problema vienen dados por,

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

$$\begin{aligned}\vec{r} &= h\hat{j}, \\ \vec{r}' &= -x\hat{i}\end{aligned}\tag{51}$$

y el vector resta viene dado por,

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}' &= x\hat{i} + h\hat{j}, \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{x^2 + h^2}\end{aligned}\tag{52}$$

El diferencial  $d\vec{l}$  apunta en la dirección de la corriente eléctrica, en este caso en la dirección negativa del eje  $x$ , luego

$$d\vec{l} = -dx\hat{i}\tag{53}$$

El campo magnético  $\vec{B}_3$ , viene dado por la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\tag{54}$$

Usando (52) y (53), se tiene,

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{-dx\hat{i} \times (x\hat{i} + h\hat{j})}{(x^2 + h^2)^{3/2}}\tag{55}$$

El producto cruz vale:  $\hat{i} \times (x\hat{i} + h\hat{j}) = h\hat{k}$ , luego,

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 h I}{4\pi} \int_R^\infty \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \hat{k}\tag{56}$$

Integrando, se tiene

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 h I}{4\pi} \left[ \frac{x}{h^2 \sqrt{x^2 + h^2}} \right]_R^\infty \hat{k}\tag{57}$$

El campo del alambre 3 apunta en dirección negativa del eje  $z$ .

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi h} \left[ 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] \hat{k}\tag{58}$$

Por simetría, el campo magnético del alambre 1 vale lo mismo que el campo creado por el alambre 3, luego escribimos,

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi h} \left[ 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] \hat{k}\tag{59}$$

Calculemos ahora el campo magnético producido por el alambre semi-circunferencial 2 que se encuentra en el plano  $(x, z)$ . La Fig. 4.3 muestra la disposición de los vectores.

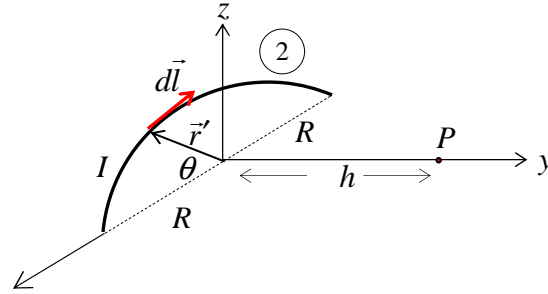


Figura 4.3 Campo magnético creado por un alambre semi-circunferencial con corriente en el punto  $P$ .

Los otros vectores que definen al problema vienen dados por,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= h\vec{j}, \\ \vec{r}' &= R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{k})\end{aligned}\quad (60)$$

el vector resta viene dado por,

$$\begin{aligned}(\vec{r} - \vec{r}') &= (-R\cos\theta\hat{i} + h\vec{j} - R\sin\theta\hat{k}), \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{R^2 + h^2}\end{aligned}\quad (61)$$

El vector  $d\vec{l}$  es tangente al alambre en la dirección de la corriente  $I$ , luego  $d\vec{l} = d\vec{r}'$

$$d\vec{l} = d\vec{r}' = R(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{k})d\theta\quad (62)$$

Reemplazando los vectores en (61) y (62), el campo magnético viene dado por

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(-Rd\theta\sin\theta\hat{i} + Rd\theta\cos\theta\hat{k}) \times (-R\cos\theta\hat{i} + h\vec{j} - R\sin\theta\hat{k})}{(R^2 + h^2)^{3/2}}\quad (63)$$

Pero  $(R^2 + h^2)$  no varía cuando  $\theta$  varía de  $\theta = 0$  a  $\theta = \pi$ , por lo tanto, dicho término puede salir fuera del signo integral. El producto cruz viene dado por

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -Rd\theta\sin\theta & 0 & Rd\theta\cos\theta \\ -R\cos\theta & h & -R\sin\theta \end{vmatrix} = (-hRd\theta\cos\theta\hat{i} - R^2d\theta\hat{j} - hRd\theta\sin\theta\hat{k})\quad (64)$$

Insertando este resultado en (63), se obtiene,

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \int \left( -hR d\theta \cos \theta \hat{i} - R^2 d\theta \hat{j} - hR d\theta \sin \theta \hat{k} \right) \quad (65)$$

Separando las integrales,

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \left[ -hR \int_0^\pi \cos \theta d\theta \hat{i} - R^2 \int_0^\pi d\theta \hat{j} - hR \int_0^\pi \sin \theta d\theta \hat{k} \right] \quad (66)$$

Sabemos que  $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^\pi = 2$  y que  $\int_0^\pi \cos \theta d\theta = \sin \theta \Big|_0^\pi = 0$ , luego (66), queda

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \left[ \pi R^2 \hat{j} + 2hR \hat{k} \right] \quad (67)$$

Dado que  $\vec{B}_1 = \vec{B}_3$ , como se indicó en la relación (59), el campo magnético resultante  $\vec{B}_R$ , viene dado por:

$$\vec{B}_R = 2\vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (68)$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (58) y (67), se tiene

$$\vec{B}_R = -\frac{\mu_0 I}{2\pi h} \left[ 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] \hat{k} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \left[ \pi R^2 \hat{j} + 2hR \hat{k} \right] \quad (69)$$

reordenando vemos que el campo resultante se encuentra sólo en el plano  $(y, z)$ , ya que la componente a lo largo del eje  $x$  se anula por simetría,

$$\vec{B}_R = -\left( \frac{\mu_0 I R^2}{4(R^2 + h^2)^{3/2}} \right) \hat{j} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) + \frac{hR}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \right] \hat{k} \quad (70)$$

Consideremos ahora el caso límite  $h \rightarrow 0$ , es decir, obtengamos el campo magnético resultante en el centro de la semi-circunferencia.

Dos términos de la expresión (70) tienen un límite muy simple, a saber,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\mu_0 I R^2}{4(R^2 + h^2)^{3/2}} \right) \hat{j} = \left( \frac{\mu_0 I}{4R} \right) \hat{j} \quad (71)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{hR}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \right) \hat{k} = 0 \hat{k} \quad (72)$$

Ahora debemos calcular el límite cuando  $h \rightarrow 0$  del término

$$\frac{1}{h} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \quad (73)$$

Primero reescribamos el término con la raíz en la forma

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{1}{R} \left( 1 + \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (74)$$

Haciendo una expansión en serie de Taylor, en primera aproximación para  $h$  pequeño, se cumple que,

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \approx \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right) \quad (75)$$

Reemplazando este resultado en la relación (73), se tiene

$$\frac{1}{h} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \approx \frac{1}{h} \left( 1 - 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{h}{R^2} \quad (76)$$

Cuando  $h \rightarrow 0$ , este término se anula. En consecuencia, cuando  $h \rightarrow 0$ , el campo magnético resultante viene dado solo por la expresión (71),

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{j} \quad (77)$$

5.- Una lámina no conductora circular de radio  $a$  tiene una densidad superficial de carga  $\sigma$ . calcular el campo magnético sobre el eje si la lámina rota en torno a su eje de simetría con velocidad angular  $\omega$

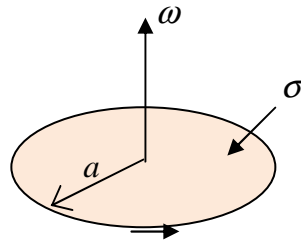


Figura 5.1 Campo magnético creado por una lamina de carga rotante.

## 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

### Solución:

Calcularemos el campo magnético usando la ley de Biot-Savart, ya que no existe suficiente simetría para usar la ley de Ampere. Subdividiremos la lámina en infinitas espiras circunferenciales de radio  $r$  variable, cada una de las cuales lleva una corriente diferencial  $dI$ . Usaremos el resultado conocido del campo magnético sobre el eje de una espira circular de radio  $r$ , y luego usaremos la expresión resultante para obtener el campo creado por toda la lámina rotante en un punto sobre su eje.

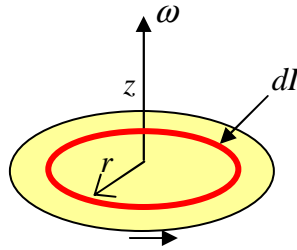


Figura 5.2 Campo magnético creado por un alambre de radio  $r$  y corriente diferencial  $dI$ .

El tiempo que demora la lámina en dar una vuelta entera, se define como el periodo  $T$  del movimiento, el cual se relaciona con la velocidad angular  $\omega$  en la forma  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Una espira de espesor  $dr$  tiene una carga diferencial  $dq = \sigma dA$ , donde el diferencial de área viene dado por  $dA = 2\pi r dr$ , luego el diferencial de carga  $dq$  viene dado por  $dq = \sigma 2\pi r dr$ . Cuando la lámina rota, se genera una corriente diferencial  $dI$  que viene dada por

$$dI = \frac{dq}{T} = \omega \sigma r dr \quad (78)$$

En el problema 3, relación (42), demostramos que el campo magnético a una altura  $z$  sobre el eje de una espira circular de radio  $R$  con corriente  $I$ , viene dado por,

$$B(z)\hat{k} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (79)$$

En el problema que estamos resolviendo, la espira circular tiene un radio  $r$  variable y una corriente diferencial  $dI$ , en consecuencia, el módulo del campo magnético creado es un campo magnético diferencial y viene dado por



$$dB(z) = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (80)$$

Nótese que esta expresión se ha obtenido usando la relación (79), donde hemos reemplazado:  $R$  por  $r$ ,  $I$  por  $dI$  y por lo tanto, también hemos reemplazado  $B$  por  $dB$ .

Reemplazando  $dI = \omega \sigma r dr$  dado por la relación (78), se tiene la siguiente expresión para  $dB(z)$ ,

$$dB(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma r^3 dr}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (81)$$

Para obtener el campo magnético resultante, usamos el Principio de Superposición, es decir, sumamos todos los campos magnéticos diferenciales (81). Integrando desde  $r = 0$  hasta  $r = a$  para considerar las contribuciones de toda la lámina que rota, se tiene:

$$B(z) = \int dB(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^a \frac{r^3 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (82)$$

La integral vale

$$\int_0^a \frac{r^3 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_0^a = \frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{2z^2}{|z|} \quad (83)$$

Reemplazando en (82), se obtiene el campo magnético creado por toda la lámina cargada con densidad superficial de carga  $\sigma$ , que gira con velocidad angular constante,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[ \frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{2z^2}{|z|} \right] \hat{k} \quad (84)$$

6.- Calcular el campo magnético creado en el eje de un solenoide de radio  $R$  y de largo  $L \gg R$ , formado con  $N$  vueltas y que trasporta una corriente constante  $I$ .

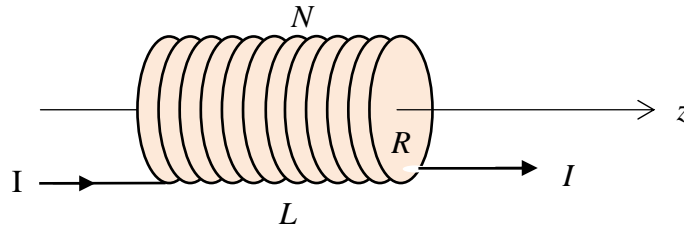


Figura 6.1 Campo magnético creado por un solenoide sobre su eje  $z$ .

## 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

### Solución:

Calcularemos el campo magnético usando la ley de Biot-Savart, ya que no existe suficiente simetría para usar la ley de Ampere. Primero calcularemos el campo magnético sobre el eje de una espira circular de radio  $R$  y luego usaremos la expresión resultante para obtener el campo creado por todo el solenoide en un punto sobre su eje.

Ya vimos en el problema 3 y en el problema 5 que el campo magnético creado por una espira circunferencial de radio  $R$ , a una distancia  $z$  del plano de la espira, viene dado por

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (85)$$

Usando este resultado, calcularemos el campo magnético producido por el solenoide, sumando los campos diferenciales (Principio de Superposición) creados por espiras circunferenciales de espesor diferencial  $dz'$ . Subdividamos el solenoide en espiras circunferenciales de espesor diferencial  $dz'$ .

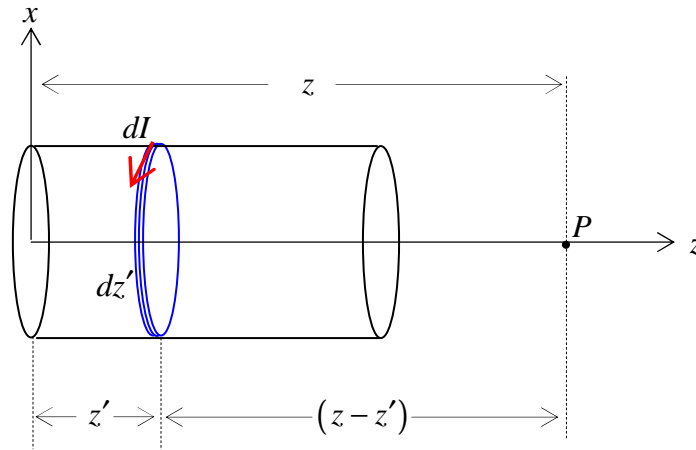


Figura 6.2 Campo magnético generado por una espira de espesor diferencial  $dz'$ , con corriente  $dI$ , a una distancia  $(z - z')$  sobre el eje  $z$ .

La Fig. 6.2 muestra un esquema del solenoide, indicando una corriente diferencial  $dI$  contenida en una espira de espesor diferencial  $dz'$ . Esta espira diferencial genera un campo magnético diferencial  $d\vec{B}$  en el punto  $P$ , a una distancia  $(z - z')$  sobre su eje.

Usaremos el resultado (85), pero cambiando  $I$  por  $dI$ ,  $z$  por  $(z - z')$  y cambiando  $B(z)$  por  $dB(z)$ . Trabajaremos solo con el módulo del campo magnético.

$$dB(z) = \frac{\mu_0 R^2}{2(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dI \quad (86)$$

Ahora debemos escribir la corriente diferencial  $dI$  en función de las magnitudes que caracterizan a la espira de espesor  $dz'$ . Sabemos que cada espira de todo el solenoide lleva una corriente  $I$ . Además sabemos que un solenoide está caracterizado por el número de espiras por unidad de largo  $n$  definido como,  $n = \frac{N}{L}$ . Entonces, en un espesor  $dz'$ ,  $n$  viene dado por  $n = \frac{dN}{dz'}$ . Por lo tanto, en un largo diferencial  $dz'$ , circula una corriente diferencial  $dI$ , dada por  $dI = IdN = I(n dz')$ . Insertando este resultado en la expresión (86) para el campo magnético, nos queda

$$dB(z) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz' \quad (87)$$

El campo magnético resultante se obtiene usando el Principio de Superposición, es decir, integrando sobre todas las contribuciones diferenciales,

$$B(z) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_0^L \frac{dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (88)$$

integrando, se tiene

$$B(z) = -\frac{\mu_0 n I}{2} \frac{(z - z')}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \Big|_0^L \quad (89)$$

Finalmente obtenemos:

$$B(z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{(z)}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{(z - L)}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}} \right] \quad (90)$$

Campo magnético del solenoide en el origen del sistema de referencia  $z = 0$ .

Si  $z = 0$  y al mismo tiempo imponemos la condición  $L \gg R$  (condición que caracteriza al solenoide), el campo magnético en el extremo izquierdo del solenoide vale,

$$B(z = 0) = \frac{\mu_0 n I}{2} \quad (91)$$

Campo magnético del solenoide en su extremo derecho,  $z = L$ .

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

Si  $z = L$  y exigimos la condición  $L \gg R$ , el campo magnético en el extremo derecho del solenoide vale,

$$B(z = L) = \frac{\mu_0 n I}{2} \quad (92)$$

Si  $z = \frac{L}{2}$ , el campo magnético en el centro del solenoide vale,

$$B\left(z = \frac{L}{2}\right) = \mu_0 n I \quad (93)$$

A partir de la expresión general (90) obtenida para el campo magnético, podemos reobtener el campo de una sola espira. Para ello bastaría hacer  $L \rightarrow 0$ . Si lo hacemos así, aparentemente obtenemos  $B(z) = 0$ , lo cual sería incorrecto. Lo que ocurre es que el parámetro  $L$  también participa en la definición del parámetro  $n = \frac{N}{L}$ . Reescribiendo el campo general, tenemos

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I}{2L} \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{(z-L)}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right) \quad (94)$$

En este caso, si  $L \rightarrow 0$ , se produce un cero en el numerador y en el denominador, es decir, ocurre que  $B(z) \rightarrow \left(\frac{0}{0}\right)$ . Por lo tanto, usaremos la regla de L'Hopital para obtener el límite deseado, es decir, derivamos por separado, numerador y denominador, con respecto a  $L$  y después aplicamos el límite  $L \rightarrow 0$ . En símbolos, se trata de hacer lo siguiente

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I}{2} \lim_{L \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{d}{dL} \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{(z-L)}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right]}{\frac{d}{dL}(L)} \right\} \quad (95)$$

La derivada del denominador vale 1 y es independiente de  $L$ , por lo tanto basta calcular la derivada del numerador

$$\frac{d}{dL} \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{(z-L)}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right] = -\frac{d}{dL} \left[ \frac{(z-L)}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right] \quad (96)$$

calculando la derivada, obtenemos

$$\frac{d}{dL} \left[ \frac{(z)}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{(z-L)}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right] = \frac{R^2}{\left(R^2 + (z-L)^2\right)^{3/2}} \quad (97)$$

Entonces (95), viene expresada como

$$B(z) = \frac{\mu_0 NI}{2} \lim_{L \rightarrow 0} \left\{ \frac{R^2}{\left(R^2 + (z-L)^2\right)^{3/2}} \right\} \quad (98)$$

Realizando el límite y considerando una sola espira  $N = 1$ , obtenemos finalmente el campo magnético de una sola espira, que habíamos encontrado en problemas anteriores

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \quad (99)$$

7.- Hallar el vector campo magnético  $\vec{B}(r)$  en función de la distancia radial  $r$ , generado por un cilindro muy largo de radio  $R$  que lleva una densidad de corriente  $J = cte$  que sale de la página, como se indica en la parte derecha de la Fig. 7.1.

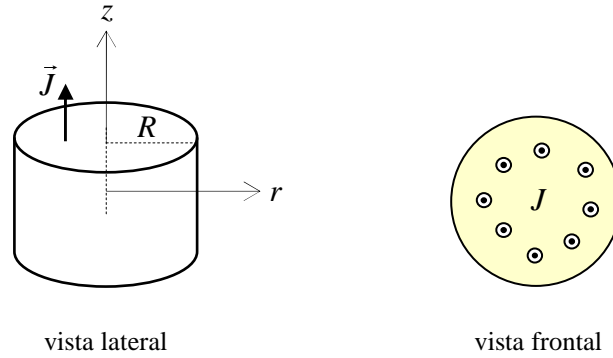


Figura 7.1 Campo magnético generado por un alambre muy largo con densidad de corriente  $\vec{J}$ .

### Solución:

En este ejercicio existe suficiente simetría como para aplicar la ley de Ampere para calcular el módulo del campo magnético generado por el alambre con corriente. Lo que hace posible la aplicación de la ley de Ampere es que el alambre es muy largo, por lo tanto las líneas de campo magnético  $\vec{B}$  son siempre circunferencias concéntricas con el alambre.

En este problema existen dos regiones diferentes,

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

- a) la región interior al alambre (Región I:  $0 < r < R$ ), definida por una densidad de corriente  $J$  constante,
- b) una región exterior al alambre muy largo (Región II:  $r > R$ ), donde la densidad de corriente  $J$  se hace cero.

a) Región I:  $0 < r < R$  con  $J = cte$ .

Consideremos una curva Amperiana  $\Gamma$  de forma circunferencial de radio  $0 < r < R$ , tal como se indica en la Fig. 7.2. Por la curva Amperiana  $\Gamma$  pasa una cantidad de corriente, que llamamos corriente neta encerrada,  $I_{neta}$ , que es menor que la corriente total que circula por el alambre de radio  $R$ . El cilindro más oscuro indica la región que debe ser considerada dentro de la Amperiana  $\Gamma$ , para la correcta aplicación de la ley de Ampere.

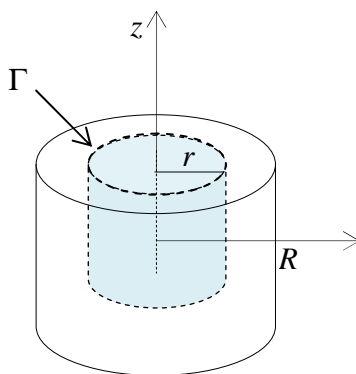


Figura 7.2 Por la Amperiana  $\Gamma$  de radio  $r < R$  pasa una corriente neta menor que la corriente total.

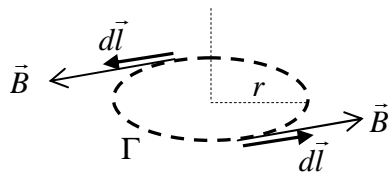


Figura 7.3 Amperiana  $\Gamma$  de radio  $r < R$ . El campo magnético  $\vec{B}$  y el diferencial de camino  $d\vec{l}$ , son siempre paralelos sobre la Amperiana  $\Gamma$ .

La ley de Ampere nos dice que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{neta} \quad (100)$$

La Fig. 7.3 indica que sobre la curva Amperiana  $\Gamma$  el campo magnético  $\vec{B}$  y el diferencial de camino  $d\vec{l}$  sobre la Amperiana  $\Gamma$ , son siempre paralelos, por lo tanto,

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \quad (101)$$

Ademas, sobre la curva Amperiana  $\Gamma$  de radio constante, el módulo  $B$  del campo magnético es constante, por lo tanto,  $B$  puede salir de la integral en la ley de Ampere (100)

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B dl = B \oint_{\Gamma} dl = \mu_0 I_{neta} \quad (102)$$

Pero, sobre la curva amperiana circunferencial  $\Gamma$ , esta integral mide el perímetro de la circunferencia de radio  $r < R$ , por lo tanto,  $\oint_{\Gamma} dl = 2\pi r$ . Reemplazando este resultado en (102), se tiene

$$B 2\pi r = \mu_0 I_{neta} \quad (103)$$

Ahora sólo falta calcular la corriente neta  $I_{neta}$  encerrada dentro de la Amperiana de radio  $r < R$ . Sabemos que la densidad de corriente  $\vec{J}$  se relaciona con la corriente a través de la siguiente expresión general  $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$ , por lo tanto, para la corriente neta  $I_{neta}$ , se cumple que

$$I_{neta} = \int_0^{r < R} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (104)$$

donde  $d\vec{S}$  es la diferencial de superficie que sale de la superficie encerrada por la curva Amperiana  $\Gamma$ . En este caso la superficie encerrada es un círculo de radio  $r < R$ , tal como lo indica la Fig. 7.4. Allí también se indica que el vector densidad de corriente  $\vec{J}$  y  $d\vec{S}$  son paralelos, lo cual implica que  $\vec{J} \cdot d\vec{S} = J dS$ .

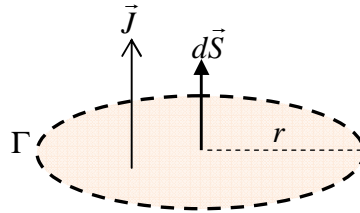


Figura 7.4 Amperiana  $\Gamma$  de radio  $r < R$ . La diferencial de superficie  $d\vec{S}$  es perpendicular a la superficie.

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

Por lo tanto, la corriente neta  $I_{neta} = \int_0^{r < R} \vec{J} \cdot d\vec{S}$ , viene dada por

$$I_{neta} = \int_0^{r < R} J dS \quad (105)$$

dado que  $J$  es constante sobre la superficie de integración, puede salir del signo integral y nos queda

$$I_{neta} = J \int_0^{r < R} dS \quad (106)$$

La integral de superficie mide el área de la superficie del círculo de radio  $r < R$  encerrada por la Amperiana, por lo tanto,

$$\int_0^{r < R} dS = \pi r^2 \quad (107)$$

reemplazando este resultado en (106), se obtiene la corriente neta encerrada por la Amperiana

$$I_{neta} = J(\pi r^2) \quad (108)$$

Reemplazando este resultado en (103), se obtiene

$$B 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2 \quad (109)$$

simplificando y despejando, se obtiene el módulo del campo magnético justo en los puntos de la curva Amperiana de radio  $r$ ,

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 J r \quad (110)$$

Es decir, el campo magnético crece linealmente al crecer el radio de la Amperiana. En particular, si  $r \rightarrow 0$ , el campo magnético vale cero,  $B(r=0)=0$  ya que no habría corriente eléctrica encerrada dentro de la Amperiana. Si por otro lado hacemos  $r \rightarrow R$ , se obtiene el campo justo en el borde del alambre muy largo con corriente,

$$B(r=R) = \frac{1}{2} \mu_0 J R \quad (111)$$

b) Región II:  $r > R$ , con  $J = 0$ .

En este caso usamos una Amperiana circunferencial de radio  $r > R$  y repetimos el procedimiento empleado para resolver el problema en la región con  $r < R$ .



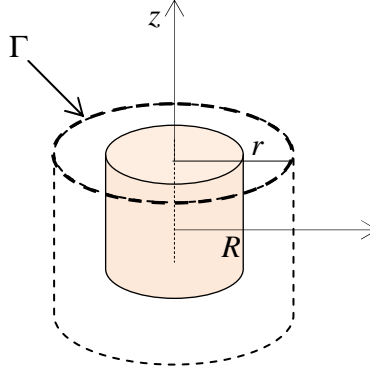


Figura 7.5 Por la Amperiana  $\Gamma$  de radio  $r > R$  pasa toda la corriente que lleva el alambre.

La Fig. 7.5 indica que la Amperiana  $\Gamma$  está fuera del alambre con corriente de radio  $R$ .

La ley de Ampere  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{neta}$ , queda

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 I_{neta} \quad (112)$$

ya que se cumple que  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$  y que  $B$  es constante sobre la curva Amperiana. La corriente neta encerrada viene dada por

$$I_{neta} = \int_0^{r>R} J dS = \int_0^R J_I dS + \int_R^{r>R} J_{II} dS \quad (113)$$

donde hemos indicado con el símbolo  $J_I$  la densidad de corriente en la región I, para  $0 < r < R$  y con  $J_{II}$  la densidad de corriente en la región II, para  $r > R$ . Pero en la región II no existe corriente eléctrica, es decir,  $J_{II} = 0$ . Por lo tanto, (113) queda,

$$I_{neta} = \int_0^R J_I dS = J \int_0^R dS = J \pi R^2 \quad (114)$$

reemplazando este resultado en la ley de Ampere (112), se tiene

$$B 2\pi r = \mu_0 I_{neta} = \mu_0 J \pi R^2 \quad (115)$$

Despejando se obtiene el campo magnético creado por el alambre en puntos exteriores a él,

$$B(r > R) = \frac{\mu_0 J R^2}{2r} \quad (116)$$

Nótese que el módulo del campo magnético tiende a cero,  $B \rightarrow 0$ , cuando  $r \rightarrow \infty$ .

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

Como caso particular podemos obtener el módulo del campo magnético justo en el borde exterior del alambre con corriente. Haciendo  $r = R$ , obtenemos,

$$B(r = R) = \frac{1}{2} \mu_0 J R \quad (117)$$

resultado idéntico al resultado encontrado en la relación (111) para el caso de la región I. Estos resultados indican que el campo magnético es continuo como función de la distancia radial  $r$ .

8.- En un alambre cilíndrico muy largo se tiene una distribución de corrientes que se expresa en función del módulo de la densidad de corriente  $J$  en la siguiente forma,

$$J(r) = \begin{cases} J_1 = \alpha r, & r < a, \text{ Región I, la corriente sale} \\ J_2 = \left(\frac{\beta}{r}\right), & a < r < b, \text{ Región II, la corriente entra} \\ J_3 = 0, & r > b, \text{ Región III, fuera del alambre} \end{cases} \quad (118)$$

Hallar el campo magnético  $B(r)$  en función de la coordenada radial  $r$ , creado por esta distribución de corriente, en cada una de las tres regiones con distinta densidad de corriente.

La Fig. 8.1 muestra las direcciones de la densidad de corriente.

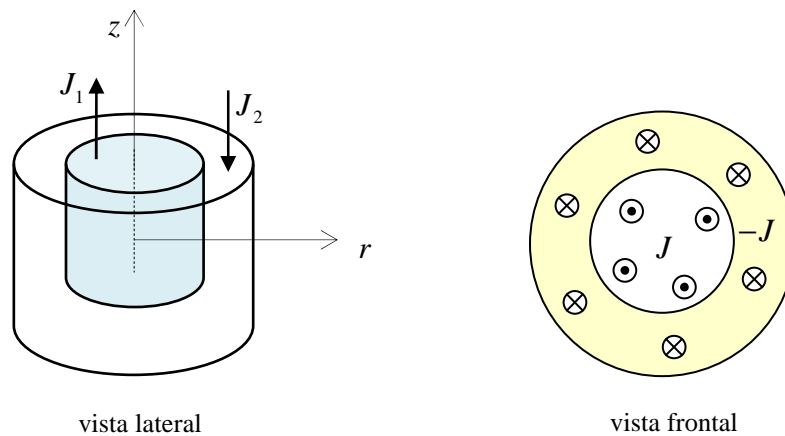


Figura 8.1 Campo magnético creado por un alambre que lleva corrientes eléctricas en distintos sentidos.

La corriente eléctrica sube por el cilindro central de radio  $a$  y baja por el cascarón externo de radio  $b$ . Fuera de los alambres no existe corriente eléctrica.

**Solución:**

En el problema anterior hemos aprendido que para alambres muy largos es posible aplicar la ley de Ampere. También hemos aprendido que a través de la Amperiana siempre se cumple que  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = Bdl$  porque ambos vectores son paralelos. Además el módulo del campo magnético sobre una Amperiana de radio fijo es constante, en consecuencia, para este tipo de simetría, siempre podemos escribir

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r \quad (119)$$

donde  $r$  es el radio de la curva Amperiana que estamos estudiando.

Región I ( $0 < r < a$ )

Usando ley de Ampere,  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{neta}$ , se tiene

$$B_1 2\pi r = \mu_0 I_{neta} = \mu_0 \int_0^{r < a} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} \quad (120)$$

El vector  $\vec{J}_1$  es paralelo a la diferencial de superficie  $d\vec{S}$  que sale de la superficie encerrada por la curva Amperiana  $\Gamma$ , por lo tanto,  $\vec{J}_1 \cdot d\vec{S} = J_1 dS$ . Además la diferencial de superficie del círculo vale  $dS = 2\pi r dr$ . En esta región I, la densidad de corriente vale  $J_1 = (\alpha r)$ .

Reemplazando estos resultados en (120), se tiene

$$B_1 2\pi r = \mu_0 \int_0^{r < a} (\alpha r) 2\pi r dr \quad (121)$$

$$B_1 2\pi r = \mu_0 2\pi \alpha \int_0^{r < a} r^2 dr = \frac{\mu_0 2\pi \alpha}{3} r^3 \quad (122)$$

integrando,

$$B_1 2\pi r = \frac{\mu_0 2\pi \alpha}{3} r^3 \quad (123)$$

simplificando, se obtiene el campo magnético en la región I

$$B_1 = \frac{\mu_0 \alpha}{3} r^2 \quad (124)$$

Región II ( $a < r < b$ )

Procediendo de la misma manera anterior, escribimos

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_0^{a < r < b} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_0^a \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} + \mu_0 \int_a^{a < r < b} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} \quad (125)$$

Reemplazando las densidades de corriente,  $J_1 = (\alpha r)$  y  $J_2 = \left(\frac{\beta}{r}\right)$ , considerando que  $\vec{J}_2$  es antiparalelo a  $d\vec{S}$ , se tiene,

$$B_2 2\pi r = \mu_0 \int_0^a (\alpha r) 2\pi r dr - \mu_0 \int_a^{a < r < b} \left(\frac{\beta}{r}\right) 2\pi r dr \quad (126)$$

simplificando por  $2\pi$ , escribimos

$$B_2 r = \mu_0 \alpha \int_0^a r^2 dr - \mu_0 \beta \int_a^{a < r < b} dr \quad (127)$$

integrando, se obtiene el campo magnético en la región II,

$$B_2 = \frac{\mu_0}{r} \left[ \frac{1}{3} \alpha a^3 - \beta (r - a) \right] \quad (128)$$

Región III ( $r > b$ )

Procediendo de la misma manera anterior, escribimos

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_0^{r > b} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_0^a \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} + \mu_0 \int_a^b \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} + \mu_0 \int_b^{r > b} \vec{J}_3 \cdot d\vec{S} \quad (129)$$

pero  $J_3 = 0$ , por lo tanto,  $B_3$  viene dado

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_0^a \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} + \mu_0 \int_a^b \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} \quad (130)$$

usando los valores de la densidad de corriente, escribimos

$$B_3 2\pi r = \mu_0 \int_0^a \alpha r 2\pi r dr - \mu_0 \int_a^b \frac{\beta}{r} 2\pi r dr \quad (131)$$

simplificando e integrando, obtenemos

$$B_3 = \frac{\mu_0}{r} \left[ \frac{1}{3} \alpha a^3 - \beta (b - a) \right] \quad (132)$$

Nótese que fuera de la distribución de corriente,  $r > b$ , el módulo del campo magnético siempre tiende a cero en la forma  $\left(\frac{1}{r}\right)$ .

9.- Hallar el vector campo magnético  $\vec{B}$  en el punto  $P$ , sobre el eje  $x$ , creado por un alambre muy largo de radio  $R$  que lleva una densidad de corriente  $J = cte$  que sale de la página. Dicho alambre tiene un agujero cilíndrico muy largo de radio  $a$  en la posición que se indica en la Fig. 9.1 a través de la distancia  $l$  y el ángulo  $\theta$

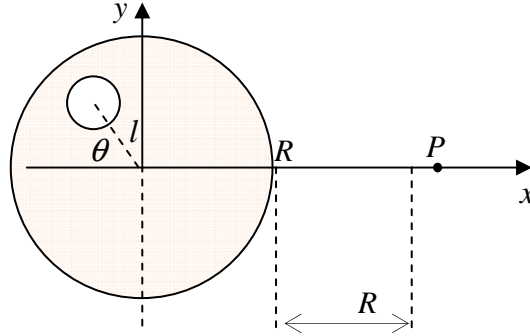


Figura 9.1 Campo magnético creado por una alambre muy largo de radio  $R$ , con densidad de corriente  $J$ , que contiene un agujero cilíndrico no concéntrico.

### Solución:

Este problema no puede ser resuelto usando la ley de Ampere, pero si usamos el Principio de Superposición, entonces podemos superponer (sumar) los campos producidos por dos alambres muy largos con corriente. A cada alambre por separado se le puede aplicar la ley de Ampere. Por lo tanto, el campo magnético resultante  $\vec{B}_R$  en el punto  $P$ , viene dado por la suma (superposición) del campo magnético producido por el alambre grande  $\vec{B}_g(x)$ , que es función de la densidad de corriente  $J$ , más del campo magnético producido por el agujero cilíndrico  $\vec{B}_{ch}(x)$  como si fuera un alambre con densidad de corriente  $(-J)$ , contraria a la densidad de corriente del alambre grande. El campo magnético resultante viene dado por

$$\vec{B}_R = \vec{B}_g(x) + \vec{B}_{ch}(x) \quad (133)$$

Como el punto  $P$  de observación del campo está fuera del alambre con corriente y fuera del agujero cilíndrico, entonces, usando la ley de Ampere podemos calcular el campo magnético a una distancia  $r$  del centro de cada alambre. Ya hemos visto en problemas

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

anteriores que el módulo del campo magnético fuera de un alambre muy largo, viene dado por

$$B = \frac{\mu_0 I_{NETA}}{2\pi r} \quad (134)$$

Este mismo resultado lo aplicaremos al alambre con corriente de radio  $R$  y al agujero cilíndrico de radio  $a$ . En este problema debemos calcular los campos magnéticos vectoriales en el punto  $P$ , porque los vectores  $\vec{B}_g(x)$  y  $\vec{B}_{ch}(x)$  no yacen sobre una misma línea.

Campo magnético creado por cilindro grande

$$\vec{B}_g = B_g \hat{e}_g \quad (135)$$

$$\vec{B}_g = \frac{\mu_0 I_{NETA}}{2\pi r_g} \hat{e}_g \quad (136)$$

Donde el radio de la Amperiana grande  $r_g$ , vale  $r_g = 2R$  y donde  $\hat{e}_g$  es un vector unitario en la dirección del campo magnético creado por el alambre grande en el punto  $P$ . En este caso, dado que la corriente sale del cilindro grande, el vector unitario apunta justo hacia arriba en el eje  $y$ , porque  $\vec{B}_g$  es perpendicular al radio  $r_g$  en el punto  $P$ , es decir,  $\hat{e}_g = \hat{j}$ .

La corriente neta viene dada por  $I_g = \int J dA = JA = J\pi R^2$ , por lo tanto, el campo creado por el cilindro grande viene dado por

$$\vec{B}_g = \frac{\mu_0 J \pi R^2}{2\pi 2R} \hat{j} \quad (137)$$

$$\vec{B}_g = \frac{\mu_0 JR}{4} \hat{j} \quad (138)$$

Campo magnético creado por el agujero cilíndrico de radio  $a$

$$\vec{B}_{ch} = B_{ch} \hat{e}_{ch} \quad (139)$$

$$\vec{B}_{ch} = \frac{\mu_0 I_{NETA}}{2\pi r_{ch}} \hat{e}_{ch} \quad (140)$$

La Fig. 9.2 muestra la dirección del campo magnético vectorial en función de los datos del problema. La corriente neta que lleva este alambre es

$$I_{neta} = \int (-J) dA = -J\pi a^2 \quad (141)$$

y apunta en sentido contrario a la corriente del alambre de radio  $R$ . El vector campo magnético  $\vec{B}_{ch}$  es un vector perpendicular al radio  $r_{ch}$  de la Amperiana.

De la geometría que se muestra en la Fig. 9.2 se obtiene  $r_{ch}$  como

$$r_{ch} = \sqrt{(2R + l_x)^2 + l_y^2} \quad (142)$$

donde  $l_x = l \cos \theta$  y  $l_y = l \sin \theta$ .

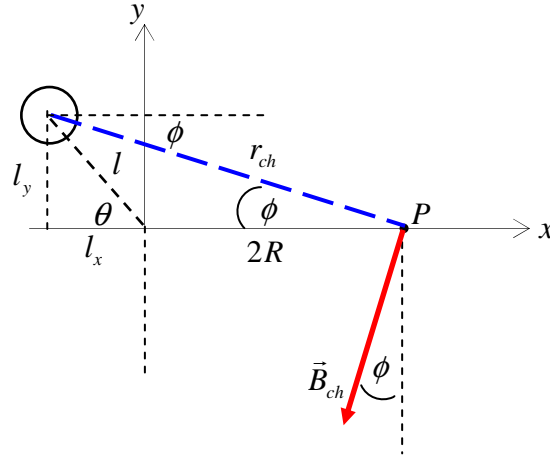


Figura 9.2 Campo magnético creado por un alambre cilíndrico de radio  $a$  y densidad de corriente  $(-J)$ .

Nótese que el campo magnético producido por el agujero cilíndrico con densidad de corriente negativa  $(-J)$ , apunta hacia abajo. En cambio, el campo magnético producido por el alambre con densidad positiva  $(J)$ , apunta hacia arriba, como indicé más arriba.

De la Fig. 9.2 se ve que el vector campo magnético  $\vec{B}_{ch}$  se desvía de la vertical hacia abajo justo en el ángulo  $\phi$ . A partir de esa información podemos obtener el vector unitario  $\hat{e}_{ch}$  en la siguiente forma

$$\hat{e}_{ch} = -\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j} \quad (143)$$

**Nota:** También podemos obtener el vector unitario en la siguiente forma alternativa.

Consideremos un sistema de referencia justo en el centro del agujero cilíndrico. Entonces el vector  $\vec{r}_{ch}$  se escribe

$$\vec{r}_{ch} = r_{ch}(\cos \phi \hat{i} - \sin \phi \hat{j}) \quad (144)$$

La diferencial de este vector es un vector tangente a la curva

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

$$d\vec{r}_{ch} = r_{ch}(-\sin\phi d\hat{i} - \cos\phi d\hat{j}) \quad (145)$$

El vector unitario  $\hat{e}_{ch}$  tangente a la curva, en el sentido de crecimiento del ángulo  $\phi$ , puede ser obtenido simplemente como

$$\frac{d\vec{r}_{ch}}{|d\vec{r}_{ch}|} = \hat{e}_{ch} = -\sin\phi\hat{i} - \cos\phi\hat{j} \quad (146)$$

Resultado idéntico al obtenido en (143).

Con todos los datos anteriores podemos escribir el campo magnético creado por el agujero cilíndrico

$$\vec{B}_{ch} = \frac{\mu_0 I_{neta}}{2\pi r_{ch}} \hat{e}_{ch} \quad (147)$$

usando el valor absoluto de la corriente neta  $I_{neta} = J\pi a^2$ , y usando el vector unitario (146), obtenemos el campo magnético vectorial creado por el agujero cilíndrico con densidad  $(-J)$ ,

$$\vec{B}_{ch} = \frac{\mu_0 (J\pi a^2)}{2\pi\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}} (-\sin\phi\hat{i} - \cos\phi\hat{j}) \quad (148)$$

donde

$$\sin\phi = \frac{l_y}{\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}}, \quad \cos\phi = \frac{(2R+l_x)}{\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}} \quad (149)$$

La suma de los campos magnéticos  $\vec{B}_g$  encontrado en (138) y  $\vec{B}_{ch}$  encontrado en (148), nos da el campo magnético resultante,

$$\vec{B}_R = \vec{B}_g(x) + \vec{B}_{ch}(x) \quad (150)$$

se tiene

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0 JR}{4} \hat{j} + \frac{\mu_0 Ja^2}{2\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}} (-\sin\phi\hat{i} - \cos\phi\hat{j}) \quad (151)$$

Reordenando, tenemos finalmente:

$$\vec{B}_R = \left\{ -\frac{\mu_0 Ja^2 \sin\phi}{2\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}} \right\} \hat{i} + \left\{ \frac{\mu_0 JR}{4} - \frac{\mu_0 Ja^2 \cos\phi}{2\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}} \right\} \hat{j} \quad (152)$$



reemplazando los valores de  $\sin \phi$  y  $\cos \phi$  dados en (149), se obtiene finalmente el campo creado por un alambre con corriente que tiene un agujero cilíndrico,

$$\vec{B}_R = \left\{ -\frac{\mu_0 J a^2 l_y}{2((2R+l_x)^2 + l_y^2)} \right\} \hat{i} + \left\{ \frac{\mu_0 J R}{4} - \frac{\mu_0 J a^2 (2R+l_x)}{2((2R+l_x)^2 + l_y^2)} \right\} \hat{j} \quad (153)$$

10.- Un alambre infinitamente largo lleva una corriente constante  $I_1$ . Este alambre se ubica en el plano de una espira triangular, la cual conduce una corriente  $I_2$ , tal como se muestra en la Fig. 10.1. Determine la magnitud y dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético creado por el alambre largo.

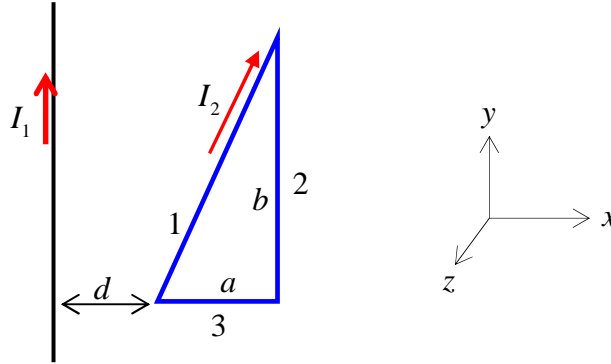


Figura 10.1 Fuerza neta sobre una espira triangular con corriente  $I_2$ , ejercida por un alambre largo con corriente  $I_1$ .

### Solución:

Calcularemos la fuerza vectorial sobre cada trozo del alambre, los cuales están numerados del 1 al 3 como se indica en la Fig. 10.1.

El campo magnético creado por el alambre largo a una distancia  $x$  a la derecha de él, viene dado por la ley de Ampere

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\hat{k}) \quad (154)$$

El signo menos indica que el campo magnético creado apunta hacia adentro de la página en la Fig. 10.1. La fuerza magnética sobre un alambre con corriente que está inmerso en un campo magnético  $\vec{B}_{ext}$ , viene dada por

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}_{ext} \quad (155)$$

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

donde  $d\vec{l}$  es la diferencial de camino en la dirección de la corriente  $I$ . En este problema,  $\vec{B}_{ext}$  siempre viene dado por la expresión (154). Dado que la corriente que crea dicho campo es  $I_1$ ,  $\vec{B}_{ext}$  queda

$$\vec{B}_{ext} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\hat{k}) \quad (156)$$

Cálculo de la fuerza  $\vec{F}_1$  sobre el alambre diagonal numerado con 1, que lleva una corriente  $I_2$ .

En este caso, el diferencial de camino  $d\vec{l}_1$  a lo largo de la varilla inclinada viene dado por

$$d\vec{l}_1 = dx\hat{i} + dy\hat{j} \quad (157)$$

Por lo tanto, la fuerza sobre la varilla inclinada viene dada por

$$\vec{F}_1 = I_2 \int d\vec{l}_1 \times \vec{B}_{ext} \quad (158)$$

Calculemos primero el término  $d\vec{l}_1 \times \vec{B}_{ext}$

$$d\vec{l}_1 \times \vec{B}_{ext} = (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\hat{k}) \quad (159)$$

$$d\vec{l}_1 \times \vec{B}_{ext} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} [dx(\hat{i} \times \hat{k}) + dy(\hat{j} \times \hat{k})] \quad (160)$$

$$d\vec{l}_1 \times \vec{B}_{ext} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left[ \frac{dy}{x} \hat{i} - \frac{dx}{x} \hat{j} \right] \quad (161)$$

La fuerza sobre la varilla inclinada (158), viene dada por

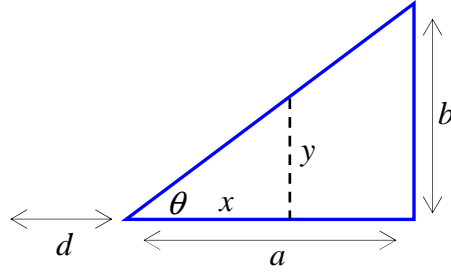
$$\vec{F}_1 = I_2 \int d\vec{l}_1 \times \vec{B}_{ext} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int \left[ \frac{dy}{x} \hat{i} - \frac{dx}{x} \hat{j} \right] \quad (162)$$

Pero las variables  $x$  e  $y$  no son independientes sobre la varilla diagonal, sino que cumplen con la relación geométrica, tal como se indica en la Fig. 10.2,

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \quad (163)$$

Por lo tanto,

$$dy = \frac{b}{a} dx \quad (164)$$


 Figura 10.2 Relación geométrica entre las variables  $x$  e  $y$ .

Reemplazando (164) en la integral (162), se tiene

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \int \left[ \frac{b dx}{x} \hat{i} - \frac{a dx}{x} \hat{j} \right] \quad (165)$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} (b \hat{i} - a \hat{j}) \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} \quad (166)$$

finalmente, la fuerza magnética sobre la varilla inclinada, vale

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} (b \hat{i} - a \hat{j}) \ln \left( \frac{d+a}{d} \right) \quad (167)$$

Cálculo de la fuerza  $\vec{F}_2$  sobre el alambre vertical.

En este caso, el diferencial de camino vale  $d\vec{l}_2 = -dy \hat{j}$ , y el campo magnético debe ser evaluado en un valor fijo de la coordenada  $x$ , a saber,  $x = d + a$ . Entonces, el campo externo es constante sobre toda la varilla vertical y vale

$$\vec{B}_{ext} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} (-\hat{k}) \quad (168)$$

La fuerza viene dada por

$$\vec{F}_2 = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{ext} \quad (169)$$

Calculemos primero  $d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{ext}$ ,

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{ext} = (-dy \hat{j}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} (-\hat{k}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} dy \hat{i} \quad (170)$$

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{ext} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} dy \hat{i} \quad (171)$$

La fuerza (169), viene dada por

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

$$\vec{F}_2 = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{ext} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} \int_0^b dy \hat{i} \quad (172)$$

La fuerza magnética sobre la varilla vertical con corriente apunta hacia la derecha

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d+a)} \hat{i} \quad (173)$$

Cálculo de la fuerza  $\vec{F}_3$  sobre el alambre horizontal

En este caso,  $d\vec{l}_3 = -dx \hat{i}$ , y el campo magnético es variable. La fuerza viene dada por

$$\vec{F}_3 = I_2 \int d\vec{l}_3 \times \vec{B}_{ext} \quad (174)$$

Calculemos primero el término  $d\vec{l}_3 \times \vec{B}_{ext}$

$$d\vec{l}_3 \times \vec{B}_{ext} = (-dx \hat{i}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\hat{k}) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{dx}{x} \hat{j} \quad (175)$$

$$d\vec{l}_3 \times \vec{B}_{ext} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{dx}{x} \hat{j} \quad (176)$$

La fuerza (174), viene dada por

$$\vec{F}_3 = I_2 \int d\vec{l}_3 \times \vec{B}_{ext} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} \hat{j} \quad (177)$$

Obteniéndose una fuerza de hacia abajo

$$\vec{F}_3 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \hat{j} \quad (178)$$

La fuerza resultante  $\vec{F}_R$  sobre la espira triangular con corriente sometida a un campo magnético externo creado por el alambre recto vertical, viene dada por,

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad (179)$$

Reemplazando los resultados obtenidos en (167), (173) y (178), se tiene

$$\vec{F}_R = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} (-b \hat{i} + a \hat{j}) \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) + \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d+a)} \hat{i} - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \hat{j} \quad (180)$$

reordenando, se tiene,

$$\vec{F}_R = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left[ \frac{1}{(d+a)} - \frac{1}{a} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \right] \hat{i} + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[ \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) - \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \right] \hat{j} \quad (181)$$

Este resultado muestra que se anula la componente vertical de la fuerza, por lo tanto, la fuerza resultante actúa sólo en dirección horizontal:

$$\vec{F}_R = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left[ \frac{1}{(d+a)} - \frac{1}{a} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right) \right] \hat{i} \quad (182)$$

11.- Una espira rectangular se mueve con velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$  constante saliendo de una región de campo magnético  $\vec{B} = B\hat{k}$  constante que sale de la página y que está homogéneamente distribuido en una región rectangular que se indica con línea punteada. Hallar la magnitud de la Fem  $\mathcal{E}$  inducida en la espira rectangular e indique en qué dirección se mueve la corriente inducida.

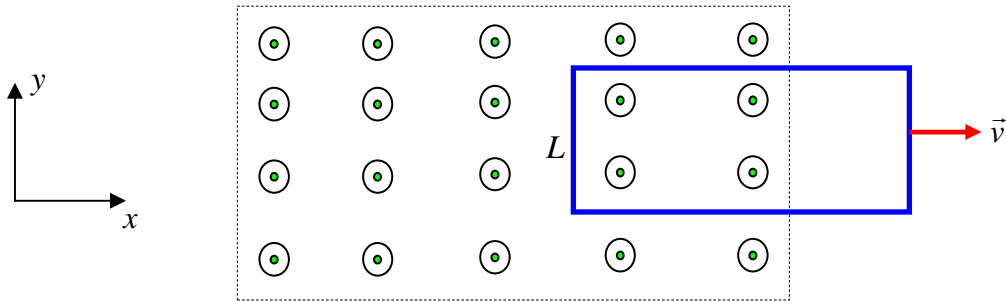


Figura 11.1 Fem y corriente eléctrica inducida en una espira móvil.

**Solución:**

Se mostrará la solución usando los dos métodos siguientes: a) se calcula la Fem usando la

ley de Faraday-Lenz  $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$ , y b) usando la definición de Fem:  $\mathcal{E} = \int \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l}$

a) Calcular la Fem usando la ley de Faraday-Lenz.

Calculemos el flujo magnético  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$  a través del sector de la espira que se encuentra dentro de la región con campo magnético. Como  $\vec{B}$  y  $d\vec{A}$  son paralelos y además  $B$  es constante el flujo queda

$$\phi_m = BA \quad (183)$$

Llamemos  $x$  a la sección horizontal de la espira que aún está dentro de la región con campo magnético. Entonces, de acuerdo a la Fig. 11.2,  $A = Lx$ , es decir, el flujo magnético viene dado por:

$$\phi_m = BLx \quad (184)$$

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

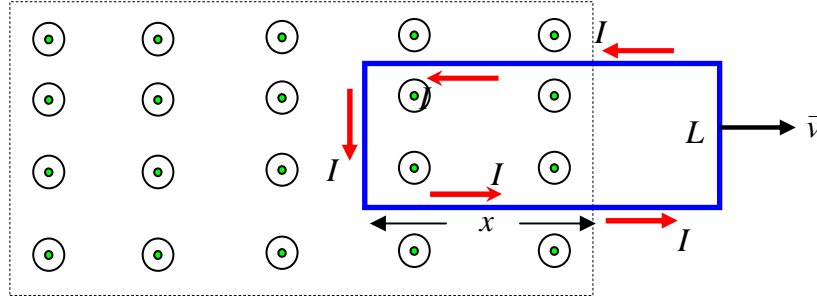


Figura 11.2 Corrientes inducidas en la espira móvil.

La Fem inducida, en valor absoluto, queda entonces:

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \frac{d(BLx)}{dt} = BL \frac{dx}{dt} \quad (185)$$

y dado que  $v = \frac{dx}{dt}$ , se obtiene la Fem

$$\mathcal{E} = BLv \quad (186)$$

El sentido de giro de la corriente inducida  $I$  en la espira es tal, que produce un campo magnético inducido que se opone al cambio del flujo. Cuando la espira está saliendo de la región con campo magnético, está disminuyendo el número de líneas de campo magnético que la cruzan la espira saliendo fuera de la página, por ello, se genera una corriente eléctrica inducida, contraria al movimiento de los punteros del reloj que genera campo magnético que sale hacia fuera de la espira, como se indica en la Fig. 11.2.

b) Calcular la Fem usando la definición:  $\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Consideremos solamente el trozo vertical de la espira que se encuentra dentro de la región con campo magnético moviéndose hacia la derecha con velocidad  $\vec{v}$ , como si estuviera aislado del resto de la espira. (Ver Fig. 11.3). Sobre cada portador de carga positivo de esta varilla actúa una fuerza magnética dada por:  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Dado que  $\vec{v} = v\hat{i}$  y que  $\vec{B} = B\hat{k}$ , el producto cruz vale

$$\vec{v} \times \vec{B} = v\hat{i} \times B\hat{k} = vB(-\hat{j}) \quad (187)$$

Es decir, la fuerza magnética sobre la carga  $q$  apunta hacia abajo

$$\vec{F}_m = -qvB\hat{j} \quad (188)$$

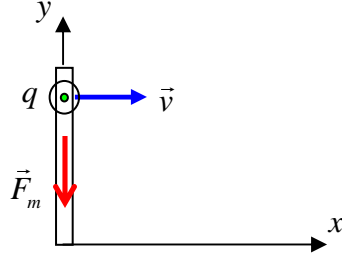


Figura 11.3 Fuerza magnética sobre cargas en movimiento, pertenecientes a la varilla vertical.

La fuerza magnética actuando sobre cada portador de carga produce una acumulación de carga positiva en la parte inferior de la varilla y una acumulación de carga negativa en la parte superior de ella. Esto genera un campo eléctrico  $\vec{E}$  que produce una fuerza eléctrica  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ , que se opone a la fuerza magnética. Recuerde que, momentáneamente, estamos considerando que el trozo de varilla está aislado del resto de la espira. En el equilibrio dichas fuerzas opuestas se anulan  $\vec{F}_m + q\vec{E} = \vec{0}$ , es decir,  $\vec{E} = -\frac{\vec{F}_m}{q}$  y por lo tanto, cesa el movimiento de cargas de un extremo a otro es decir, se cumple que  $\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B})$ .

Cuando esto ocurre, podemos calcular la Fem  $\mathcal{E}$  que se produce mediante la definición

$$\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (189)$$

Usando  $\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B}) = vB\hat{j}$  y  $d\vec{l} = dy\hat{j}$ , se tiene

$$\mathcal{E} = \int (vB\hat{j}) \cdot (dy\hat{j}) = vB \int dy \quad (190)$$

Haciendo la integración a lo largo del alambre, desde  $y=0$  hasta  $y=L$ , se obtiene la Fem asociada a este trozo de alambre vertical

$$\mathcal{E} = vB \int_0^L dy = vBL \quad (191)$$

El sentido de la Fem  $\mathcal{E}$  es el mismo que el sentido de la fuerza magnética  $\vec{F}_m$  sobre los portadores de carga positivos. Esto significa que si conectamos este trozo vertical de alambre al resto de la espira, la corriente inducida  $I$  circula hacia abajo, es decir, en sentido contrario a los punteros del reloj, tal como vimos en el método anterior.

## 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

¿Qué pasó con la fuerza magnética sobre las otras varillas que forman parte de la espira cuadrada?.

En primer lugar, la fuerza sobre los trozos de varilla que están fuera del campo magnético son cero y la Fem se anula, ya que el campo magnético es cero. Así que sólo debemos ver qué ocurre con las varillas horizontales que están dentro del campo magnético. Dado que dichas porciones de varilla se mueven hacia la derecha, la fuerza magnética sobre la carga de cada varilla siempre apunta hacia abajo. Entonces la Fem entre los extremos de las varillas horizontales se calcula usando la definición de Fem

$$\mathcal{E} = \int \left( \frac{\vec{F}_m}{q} \right) \cdot d\vec{l} \quad (192)$$

Pero  $\vec{F}_m$  es perpendicular a  $d\vec{l}$  en toda la varilla horizontal, por lo tanto,  $\vec{F}_m \cdot d\vec{l} = 0$ . Esto significa que no hay contribución a la Fem debido a ninguna varilla horizontal. En consecuencia, la única contribución a la Fem viene dada por la varilla vertical que se encuentra dentro del campo magnético. Por esa razón, la Fem total viene dada por la expresión (191), resultado que coincide con el método de la variación del flujo magnético, visto anteriormente.

12.- Una espira con forma de triángulo rectángulo se mueve con velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$  entrando en una región de campo magnético homogéneo  $\vec{B} = B\hat{k}$  que sale de la página de la Fig. 12.1. Hallar la magnitud de la Fem  $\mathcal{E}$  inducida en la espira e indique en qué dirección se mueve la corriente inducida.

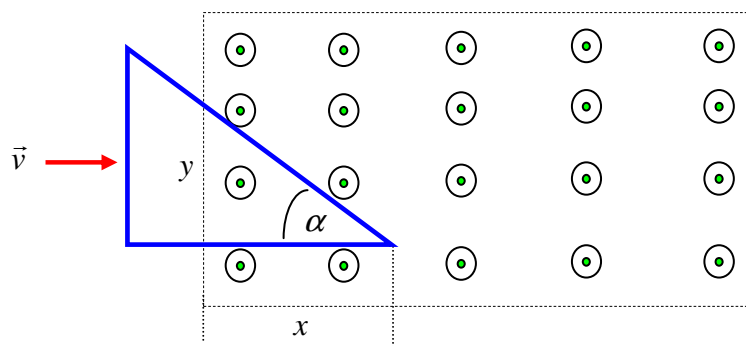


Figura 12.1 Fem y corriente inducida en una espira triangular que entra a una región con campo magnético homogéneo.



**Solución:**

Sea  $x$  la parte horizontal del triángulo que está dentro de la región con campo. El flujo magnético vale:  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ . Si consideramos que  $d\vec{A}$  sale de la página, entonces  $\vec{B}$  y  $d\vec{A}$  son paralelos y como  $B$  es constante, se tiene

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA_{\text{triángulo}} = B \left( \frac{1}{2} xy \right) \quad (193)$$

donde  $y$  es la altura del triángulo rectángulo que está justo dentro de la región con campo.

Dado que  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ , el flujo queda

$$\phi_m = \frac{1}{2} x^2 B \tan \alpha \quad (194)$$

Aplicando ley de Faraday-Lenz

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad (195)$$

se tiene,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{x^2 B \tan \alpha}{2} \right) \quad (196)$$

$$\mathcal{E} = -B \tan \alpha \left( x \frac{dx}{dt} \right) = -Bxv \tan \alpha \quad (197)$$

donde  $v = \frac{dx}{dt}$  es la velocidad con que se mueve la espira entrando a la región con campo magnético. En valor absoluto, la Fem inducida vale

$$\mathcal{E} = vBx \tan \alpha \quad (198)$$

La corriente inducida debe ir en la dirección de los punteros del reloj para producir un campo magnético inducido hacia dentro del plano, de modo de contrarrestar el aumento de flujo hacia afuera, cuando la espira se introduce en el campo magnético.

Cálculo de la Fem usando la fuerza magnética sobre una carga móvil.

La fuerza magnética sobre una carga  $q$  que pertenece a la varilla horizontal o a la varilla inclinada, que se mueve con velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$  en el campo magnético  $\vec{B} = B\hat{k}$ , viene dada por,

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v\hat{i}) \times B\hat{k} = -qvB\hat{j} \quad (199)$$

Por lo tanto, la fuerza magnética siempre apunta hacia abajo.

En el equilibrio, el campo eléctrico equivalente que actúa sobre la carga  $q$  viene dado por

$$\vec{E} = -\frac{\vec{F}_m}{q} = vB\hat{j} \quad (200)$$

Cálculo de la Fem producida por la varilla horizontal:

La diferencia de potencial a lo largo de la varilla horizontal vale cero, porque el campo eléctrico  $\vec{E} = vB\hat{j}$  y el desplazamiento  $d\vec{l} = dx\hat{i}$  a lo largo de la varilla horizontal son perpendiculares, es decir,

$$\mathcal{E}_{horizontal} = -\int_a^b (vB\hat{j}) \cdot (dx\hat{i}) = -\int_a^b vBdx(\hat{j} \cdot \hat{i}) = 0 \quad (201)$$

Cálculo de la Fem producida por la varilla inclinada:

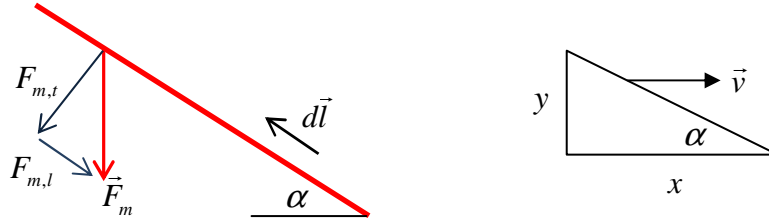


Figura 12.2 Fuerza magnética sobre la varilla inclinada.

En la Fig. 12.2, se muestra la fuerza sobre una carga en el alambre inclinado. Ya sabemos que la fuerza siempre apunta hacia abajo  $\vec{F}_m = -qvB\hat{j}$ . Esta fuerza se puede descomponer en una fuerza  $F_{m,t}$ , perpendicular al alambre inclinado, que producirá una Fem igual a cero y una fuerza  $F_{m,l}$ , que apunta justo hacia abajo a lo largo del alambre inclinado que producirá movimiento de cargas. Esto implica que la Fem inducida apunta hacia abajo a lo largo del alambre, es decir, la corriente inducida va a favor de los punteros del reloj. Este resultado coincide con el resultado obtenido por la ley de Farady-Lenz.

A lo largo de la varilla inclinada (ver Fig. 12.2), el vector desplazamiento  $d\vec{l}$  que apunta hacia arriba del plano, vale  $d\vec{l} = -dx\hat{i} + dy\hat{j}$ . El campo eléctrico viene dado por la expresión (200),  $\vec{E} = vB\hat{j}$ , luego, la Fem vale

$$\mathcal{E} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int (vB\hat{j}) \cdot (-dx\hat{i} + dy\hat{j}) \quad (202)$$

$$\mathcal{E} = \int vBdy = vBy \quad (203)$$

De acuerdo a la Fig. 12.2,  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ , luego,  $y = x \tan \alpha$ , y la Fem queda:

$$\mathcal{E} = vBx \tan \alpha$$

Esta Fem apunta hacia abajo del plano inclinado. Este resultado es el mismo resultado obtenido usando la ley de Faraday-Lenz.

13.- Calcular la fem  $\mathcal{E}$  inducida y la dirección de la corriente  $I_i$  inducida en una espira triangular con catetos de lados  $a$  y  $b$ , que se mueve con velocidad constante alejándose de un alambre infinitamente largo con corriente constante  $I$ .

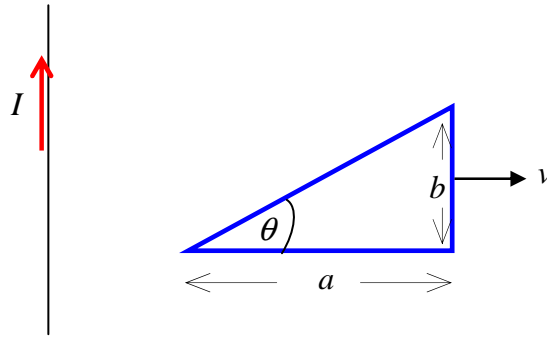


Figura 13.1 Fem inducida en una espira triangular que se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$ .

### Solución:

Usaremos dos métodos diferentes para calcular la fem  $\mathcal{E}$  inducida en la espira cuando se va alejando del alambre largo con corriente  $I$ .

Método a): Calculamos la fem  $\mathcal{E}$  inducida a través de la expresión:  $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$ . Primero calculamos el flujo magnético  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$  a través de la espira triangular y luego tomamos la derivada temporal.

Método b): Calculamos la fem  $\mathcal{E}$  inducida a través de la expresión:  $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . La integral cerrada se separa en tres integrales, cada una sobre un segmento de alambre recto

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

que forma la espira triangular. Primero calculamos la fuerza magnética sobre una carga del alambre, después obtenemos el campo eléctrico inducido y finalmente calculamos la fem  $\mathcal{E}$  inducida.

Nota: En el método a) calcularemos todo en valor absoluto y luego por análisis físico determinaremos la dirección de la fem inducida  $\mathcal{E}$  y la dirección de la corriente inducida  $I_i$ .

Cálculo de la Fem por el método a).

En primer lugar calculamos el flujo magnético  $\phi_m$  a través de la superficie del triángulo

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (204)$$

La Fig. 13.2 muestra el área diferencial que interviene en el cálculo de la Fem inducida.

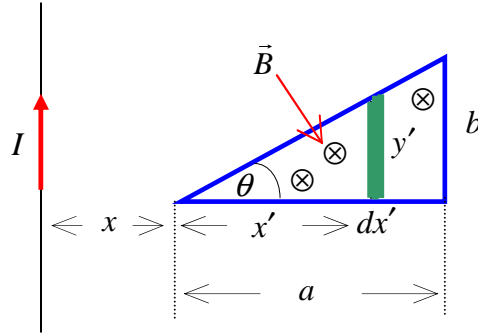


Figura 13.2 Área diferencial para calcular el flujo magnético.

En el triángulo de la Fig. 13.2 hemos dibujado un área diferencial de módulo  $dS = y'dx'$ , que se encuentra a la distancia  $(x+x')$  del alambre que crea el campo magnético sobre la espira y que le produce un flujo magnético variable. A esa distancia, el módulo del campo magnético justo sobre el área diferencial vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+x')} \quad (205)$$

Si consideramos que el diferencial de superficie del triángulo entra en la página, los vectores  $\vec{B}$  y  $d\vec{S}$  son paralelos, es decir,  $\vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS$ . Reemplazando (205) en la integral (204), tenemos

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B dS = \int_{x'=0}^{x'=a} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+x')} \right) y' dx' \quad (206)$$

Hagamos el siguiente cambio de variable  $u = x + x'$ , entonces,  $du = dx'$ , pues para la integración sobre el área del triángulo, sólo se necesita la variable  $x'$

$$\phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int y' \frac{du}{u} \quad (207)$$

Además, mirando la Fig. 13.2 vemos que existe una relación entre las variables  $y'$  y  $x'$  dada por

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{y'}{x'} \quad (208)$$

Reemplazando en la integral (207), nos queda

$$\phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{x' \tan \theta du}{u} \quad (209)$$

Pero  $x' = u - x$ , luego

$$\phi_m = \frac{\mu_0 I \tan \theta}{2\pi} \int \frac{(u - x) du}{u} \quad (210)$$

$$\phi_m = \frac{\mu_0 I \tan \theta}{2\pi} \left( \int du - x \int \frac{du}{u} \right) \quad (211)$$

Integrando, obtenemos

$$\phi_m = \frac{\mu_0 I \tan \theta}{2\pi} (u - x \ln(u)) \quad (212)$$

Volviendo a la variable original y usando los límites:  $x' = 0$  y  $x' = a$ , tenemos:

$$\phi_m = \frac{\mu_0 I \tan \theta}{2\pi} [x + x' - x \ln(x + x')]_0^a \quad (213)$$

Finalmente, el flujo magnético a través de la espira, viene dado por,

$$\phi_m = \frac{\mu_0 I \tan \theta}{2\pi} \left[ a - x \ln \left( \frac{x + a}{x} \right) \right] \quad (214)$$

Ahora que ya tenemos el flujo magnético, podemos calcular la Fem inducida, usando la definición  $\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 I \tan \theta}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[ a - x \ln \left( \frac{x + a}{x} \right) \right] \quad (215)$$

derivando

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I \tan \theta}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{x + a}{x} \right) \frac{dx}{dt} + x \left( \frac{x}{x + a} \right) \left( \frac{-a}{x^2} \right) \frac{dx}{dt} \right] \quad (216)$$

## 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

Pero  $\frac{dx}{dt} = v$ , es la velocidad con que se mueve el triángulo hacia la derecha

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 v I \tan \theta}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{x+a}{x} \right) - \left( \frac{a}{x+a} \right) \right] \quad (217)$$

Usando  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ , nos queda finalmente

$$\varepsilon = \varepsilon = \frac{\mu_0 v I b}{2\pi a} \left[ \ln \left( \frac{x+a}{x} \right) - \left( \frac{a}{x+a} \right) \right] \quad (218)$$

Dado que el flujo magnético que entra en la espira es cada vez menor a medida que la espira se aleja hacia la derecha, se genera una corriente inducida  $I_i$  que crea un campo magnético hacia adentro del triángulo, para evitar la pérdida de flujo magnético hacia adentro de la espira, por lo tanto, la corriente inducida  $I$  debe ir en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj analógico.

Cálculo de la Fem  $\varepsilon$  por el método b).

Los vértices del triángulo se rotulan con los índices  $P, Q, R$ , como se muestra en la Fig.

13.3. Calcularemos la Fem  $\varepsilon$  usando la integral

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (219)$$

siguiendo la trayectoria triangular  $PQRP$ , como se muestra en la Fig. 13.3:

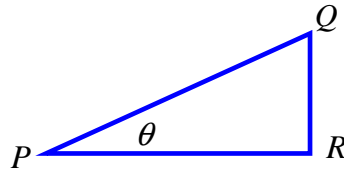


Figura 13.3 Cálculo de la Fem usando la fuerza magnética sobre cada segmento de la espira triangular.

Para calcular la integral (219), separaremos la integral cerrada en tres integrales

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_Q^R \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_R^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (220)$$

Cada integral es equivalente a calcular la Fem en cada segmento, por lo tanto podemos escribir

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{PQ} + \mathcal{E}_{QR} + \mathcal{E}_{RP} \quad (221)$$

Cálculo de la Fem  $\mathcal{E}_{PQ}$  en el segmento  $PQ$ .

El problema se reduce a calcular la Fem inducida en un alambre inclinado un ángulo  $\theta$  que se mueve alejándose con velocidad  $v$  del alambre infinitamente largo que lleva corriente constante  $I$ . Esta corriente crea un campo magnético  $\vec{B} = -B\hat{k}$  (indicado con el símbolo  $\otimes$ ) que entra en el segmento  $PQ$ .

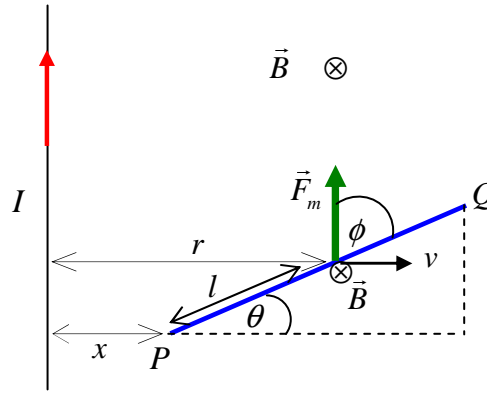


Figura 13.4 Fem de movimiento  $\mathcal{E}_{PQ}$ , generada por un trozo de alambre inclinado, que se mueve con velocidad  $v$  hacia la derecha.

Sobre la carga  $q$  del alambre se ejerce una fuerza magnética  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ , donde  $\vec{v} = v\hat{i}$  y el campo magnético  $\vec{B} = B(-\hat{k})$ , entra en el plano de la Fig. 13.3. Reemplazando, se tiene

$$\vec{F}_m = qv\hat{i} \times B(-\hat{k}) \quad (222)$$

$$\vec{F}_m = qvB\hat{j} \quad (223)$$

es decir,  $\vec{F}_m$  apunta justo hacia arriba, como se muestra en la Fig. 13.3, haciendo un ángulo  $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$  con el alambre inclinado. Esto implica que hay una componente de la fuerza  $\vec{F}_m$  apuntando justo hacia arriba a lo largo del alambre, la cual obligaría a los portadores de carga positivos a moverse también hacia arriba. En consecuencia, la Fem inducida  $\mathcal{E}_{PQ}$  en este segmento apunta hacia arriba del alambre, es decir, en dirección de  $P \rightarrow Q$ .

El campo magnético en el punto donde está la fuerza magnética viene dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\hat{k}) \quad (224)$$

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

donde  $r$  viene dado por,  $r = x + l \cos \theta$ . Mientras el alambre inclinado se está moviendo, la componente  $F_l$  de la fuerza magnética a lo largo del alambre viene dada por,

$$F_l = F_m \cos \phi = F_m \sin \theta \quad (225)$$

Esta fuerza magnética hace que las cargas positivas se muevan hacia el extremo rotulado por  $Q$  y que en el extremo rotulado con  $P$ , se acumule la carga negativa. Esta separación de cargas genera un campo eléctrico estático  $\vec{E}$  creciente que se opone a la dirección de la componente de la fuerza magnética a lo largo del alambre  $F_l$ . Al llegar al estado de equilibrio en que la fuerza neta se hace cero, y se cumple que

$$q\vec{E} = -\vec{F}_l \quad (226)$$

Por lo tanto, se igualan en módulo, la componente de la fuerza magnética  $F_l$  con la fuerza eléctrica  $qE$  a lo largo del alambre (ver Fig. 13.5), es decir, se cumple que  $qE = qvB \sin \theta$ , de donde obtenemos el campo eléctrico

$$E = vB \sin \theta \quad (227)$$

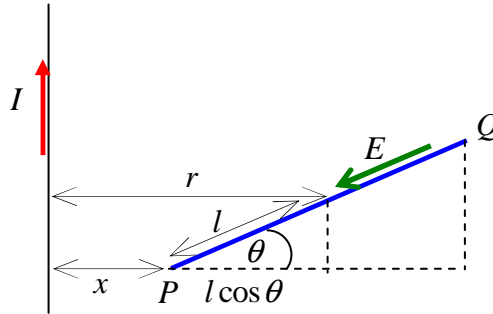


Figura 13.5 Campo eléctrico inducido  $\vec{E}$  que genera una fuerza eléctrica que se opone a la fuerza magnética.

Entonces, en valor absoluto, la integral  $\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$  queda

$$\mathcal{E}_{PQ} = \int_P^Q vB \sin \theta \, dl \quad (228)$$

donde

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + l \cos \theta)} \quad (229)$$

reemplazando en la integral (228), se tiene,



$$\varepsilon_{PQ} = \frac{\mu_0 I v \sin \theta}{2\pi} \int_0^l \frac{dl}{(x + l \cos \theta)} \quad (230)$$

Integrando, se obtiene la Fem  $\varepsilon_{PQ}$

$$\varepsilon_{PQ} = \frac{\mu_0 I v \sin \theta}{2\pi \cos \theta} \ln \left( \frac{x + l \cos \theta}{x} \right) \quad (231)$$

Finalmente,

$$\varepsilon_{PQ} = \frac{\mu_0 I v \operatorname{tg} \theta}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{l}{x} \cos \theta \right) \quad (232)$$

Pero  $l \cos \theta = a$ , luego podemos escribir

$$\varepsilon_{PQ} = \frac{\mu_0 I v \operatorname{tg} \theta}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{x} \right) \quad (233)$$

Esta Fem apunta hacia arriba del plano inclinado.

Cálculo de la Fem  $\varepsilon_{QR}$  en el segmento  $QR$ .

En este caso se trata de un alambre vertical que se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$ .

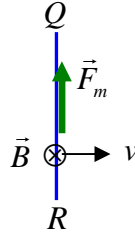


Figura 13.6 Fem  $\varepsilon_{QR}$  creada por un alambre vertical que se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$ .

La fuerza magnética es estrictamente vertical  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{j}$ , es decir, la fem  $\varepsilon_{QR}$  apunta hacia arriba en la dirección  $R \rightarrow Q$ . Como vimos antes, en el equilibrio, obtenemos un campo eléctrico que apunta hacia abajo y de magnitud tal que la fuerza resultante se anula, es decir,  $\vec{E} = -vB\hat{j}$ .

Usando este campo eléctrico, calculamos el módulo de la fem  $\varepsilon_{QR}$  a través de la integral

$$\varepsilon_{QR} = \int_Q^R \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (234)$$

### 2.2.8 Unidad IV: Problemas Resueltos

pero en este tramo,  $d\vec{l} = -dy\hat{j}$  porque apunta hacia abajo, luego

$$\mathcal{E}_{QR} = \int_0^b (-vB\hat{j})(-dy\hat{j}) \quad (235)$$

$$\mathcal{E}_{QR} = \int_0^b vBdy \quad (236)$$

En esta trayectoria vertical de  $R \rightarrow Q$ , el campo magnético  $B$  no depende de la variable  $y$  de integración, y viene dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} \quad (237)$$

Dado que  $B$  es constante para la integración, la Fem  $\mathcal{E}_{QR}$  dada por (236), viene dada por

$$\mathcal{E}_{QR} = vB y \Big|_0^b = vBb \quad (238)$$

reemplazando el valor de  $B$ , la fem  $\mathcal{E}_{QR}$  viene dada por,

$$\mathcal{E}_{QR} = vBb = \frac{\mu_0 I v b}{2\pi(x+a)} \quad (239)$$

Esta Fem apunta hacia arriba.

Cálculo de la Fem  $\mathcal{E}_{RP}$  en el segmento  $RP$ :

En este caso se trata de un alambre horizontal que se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$ . La fuerza magnética de nuevo es vertical hacia arriba.

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = qv\hat{i} \times B(-\hat{k}) = qvB\hat{j} \quad (240)$$

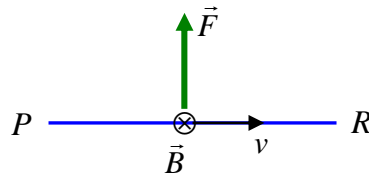


Figura 13.7 Fem  $\mathcal{E}_{RP}$  creada por un alambre horizontal que se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$ .

En este caso la fem  $\mathcal{E}_{RP}$  vale cero, porque  $\vec{E} = vB\hat{j}$  y  $d\vec{l} = -dx\hat{i}$  son perpendiculares entre sí

$$\mathcal{E}_{RP} = \int_R^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^P vB\hat{j} \cdot dx(-\hat{i}) = 0 \quad (241)$$

$$\mathcal{E}_{RP} = 0 \quad (242)$$

Por lo tanto, la Fem resultante viene dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{PQ} + \mathcal{E}_{QR} + \mathcal{E}_{RP} \quad (243)$$

Pero ambas Fem apuntan hacia arriba, es decir, tienen sentidos contrarios sobre la espira triangular. Esto significa que deben restar los efectos de las Fem. Dado que la Fem  $\mathcal{E}_{PQ}$  es mayor que la Fem  $\mathcal{E}_{QR}$ , escribimos,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{PQ} - \mathcal{E}_{QR} \quad (244)$$

Reemplazando los valores obtenidos, se encuentra la Fem inducida sobre la espira de forma triangular que se mueve en el campo magnético creado por un alambre muy largo

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I v b}{2\pi a} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{\mu_0 I v b}{2\pi(x+a)} \quad (245)$$

Este resultado coincide con el resultado encontrado en (218) usando el método a). Además, la dirección de la fem  $\mathcal{E}$  resultante, indica que la corriente eléctrica inducida debe fluir en la dirección:  $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow P$ , tal como vimos usando el método a).



### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

#### Equation Chapter 1 Section 1

Primera Prueba de Cátedra

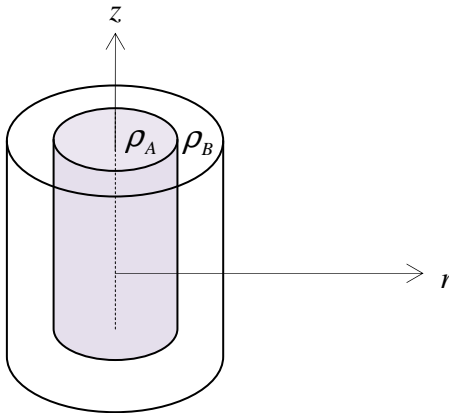
Electromagnetismo FI-604

Semestre de Otoño 2014

1. Se tiene una distribución cilíndrica de carga formada por dos regiones de diferente densidad volumétrica de carga  $\rho_A$  y  $\rho_B$ , aunque ambas son constantes. El cilindro de carga es muy largo. La densidad  $\rho(r)$  viene dada en la siguiente forma

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_A & 0 < r < a \\ \rho_B & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

- a) Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  como función de  $r$  en cada una de las tres regiones del espacio: Región I ( $0 < r < a$ ), Región II ( $a < r < b$ ), Región III ( $r > b$ ).
- b) Calcule la diferencia de potencial  $\Delta U_{b0}(r) = U_b(r) - U_0(r)$ , entre el borde externo  $r = b$  del cilindro y su centro  $r = 0$ .



**Solución:**

- a) Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  como función de  $r$  en cada una de las tres regiones del espacio: Región I ( $0 < r < a$ ), Región II ( $a < r < b$ ), Región III ( $r > b$ ).

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

Dado que cilindro es muy largo, podemos aplicar la ley de Gauss. Consideremos una Gaussiana de radio  $r$  y largo  $L$ .

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{tapa1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{tapa2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{manto} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta\ encerrada}}{\epsilon_0}$$

El campo eléctrico de la distribución cilíndrica sale de manera perpendicular a su eje de simetría y por lo tanto, es paralelo a la diferencial de superficie  $d\vec{S}$  del manto cilíndrico, es decir,  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{manto} = EdS$ . En cambio, sobre las tapas  $\vec{E}$  es perpendicular a  $d\vec{S}_{tapa}$ , por lo tanto,  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{tapa} = 0$ , y las dos primeras integrales se anulan. La ley de Gauss queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{manto} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta\ encerrada}}{\epsilon_0}$$

Por otra parte, sobre la superficie Gaussiana de radio fijo  $r$ , el módulo del campo eléctrico  $E$  es constante, por lo tanto, se puede sacar fuera de la integral, de modo que, para cualquiera de las regiones en estudio, la ley de Gauss queda

$$ES_{manto} = \frac{q_{neta\ encerrada}}{\epsilon_0}$$

La superficie del manto cilíndrico de radio  $r$  y alto  $L$ , vale  $S_{manto} = 2\pi rL$ , por lo tanto, en cualquier región, la ley de Gauss queda

$$E2\pi rL = \frac{q_{neta\ encerrada}}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

Ahora basta aplicar esta expresión en cada región calculando la carga encerrada  $q_{neta\ encerrada}$  en cada caso.

Región I ( $0 < r < a$ ):

Aplicando (1.1) para una Gaussiana de radio  $0 < r < a$ , se tiene

$$E2\pi rL = \frac{1}{\epsilon_0} q_{neta\ encerrada} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r < a} \rho_A dV_{cil}$$

El volumen del cilindro vale  $V_{cil} = \pi r^2 L$ , luego su diferencial de volumen  $dV_{cil}$  vale  $dV_{cil} = 2\pi rLdr$ . Reemplazando, se tiene

$$E2\pi rL = \frac{2\pi L\rho_A}{\epsilon_0} \int_0^{r < a} r dr = \frac{2\pi L\rho_A}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} \right)_0^r = \frac{\pi L\rho_A r^2}{\epsilon_0}$$

simplificando se obtiene el campo en la región I:

$$E_1 = \frac{\rho_A r}{2\epsilon_0}, \quad 0 < r < a \quad (1.2)$$

Región II ( $a < r < b$ ):

Aplicando (1.1) para una Gaussiana de radio  $a < r < b$ , se tiene

$$E2\pi rL = \frac{1}{\epsilon_0} q_{neta\ encerrada} = \frac{2\pi L\rho_A}{\epsilon_0} \int_0^a r dr + \frac{2\pi L\rho_B}{\epsilon_0} \int_a^{a < r < b} r dr$$

$$E2r = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_A a^2 + \frac{\rho_B}{\epsilon_0} (r^2 - a^2)$$

simplificando y reordenando, se obtiene el campo eléctrico en la Región II:

$$E_2 = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[ (\rho_A - \rho_B) \frac{a^2}{r} + \rho_B r \right], \quad a < r < b \quad (1.3)$$

Región III ( $r > b$ ):

Aplicando (1.1) para una Gaussiana de radio  $r > b$ , se tiene

$$E2\pi rL = \frac{1}{\epsilon_0} q_{neta\ encerrada} = \frac{2\pi L\rho_A}{\epsilon_0} \int_0^a r dr + \frac{2\pi L\rho_B}{\epsilon_0} \int_a^b r dr + \frac{1}{\epsilon_0} \int_b^{r > b} \rho(r) dV_{cil}$$

pero  $\rho(r) = 0$  para  $r > b$ , por lo tanto, la última integral se anula. Simplificando se obtiene el campo eléctrico en la Región III:

$$E_3 = \frac{1}{2\epsilon_0 r} [(\rho_A - \rho_B) a^2 + \rho_B b^2] \quad (1.4)$$

b) Calcule la diferencia de potencial  $\Delta V_{b0}(r) = V_b(r) - V_0(r)$ , entre el borde externo  $r = b$  del cilindro y su centro  $r = 0$ .

La diferencia de potencial viene dada por  $\Delta V_{b0} = -\int_b^0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Pero para ir desde  $r = b$  hasta

$r = 0$  hay que cruzar dos regiones de distinto campo eléctrico, luego debemos escribir

$$\Delta V_{b0} = -\int_b^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_b^a \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} - \int_a^0 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

Haciendo los productos punto y usando los  $dr$ , escribimos

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

$$\Delta V_{b0} = -\int_b^a E_2 dr - \int_a^0 E_1 dr$$

reemplazando los campos  $E_1$  y  $E_2$ , obtenidos en relaciones (1.2) y (1.3), respectivamente, se tiene

$$\Delta V_{b0} = -\int_b^a \frac{1}{2\epsilon_0} \left( (\rho_A - \rho_B) \frac{a^2}{r} + \rho_B r \right) dr - \int_a^0 \left( \frac{\rho_A r}{2\epsilon_0} \right) dr$$

reordenando

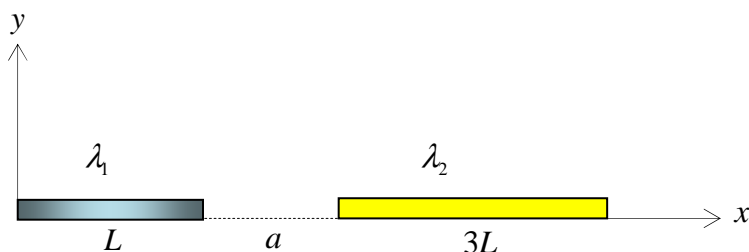
$$\Delta V_{b0} = \left( \frac{-1}{2\epsilon_0} \right) \left\{ (\rho_A - \rho_B) a^2 \int_b^a \frac{dr}{r} + \rho_B \int_b^a r dr + \rho_A \int_a^0 r dr \right\}$$

integrando, se obtiene la diferencia de potencial:

$$\Delta V_{b0} = \left( \frac{1}{2\epsilon_0} \right) \left\{ (\rho_A - \rho_B) a^2 \ln \left( \frac{b}{a} \right) + \frac{\rho_B}{2} (b^2 - a^2) + \frac{\rho_A}{2} a^2 \right\} \quad (1.5)$$

2. Se tienen dos varillas cargadas dispuestas horizontalmente, tal como se muestra en la figura. La varilla de la izquierda de largo  $L$  tiene densidad lineal constante  $\lambda_1 = \lambda_0 = cte$ , y la varilla de la derecha de largo  $3L$  tiene una densidad lineal  $\lambda_2$  dada por  $\lambda_2 = \beta x$ , donde  $\beta = cte$ . Ambas varillas están separadas una distancia  $a$ .

- Calcule el campo eléctrico producido por la varilla de la izquierda a una distancia  $x > L$  sobre el eje  $x$ , es decir, justo en la región donde se encuentra la varilla de la derecha.
- Calcule la fuerza eléctrica resultante ejercida por la varilla de la izquierda sobre la varilla de la derecha.

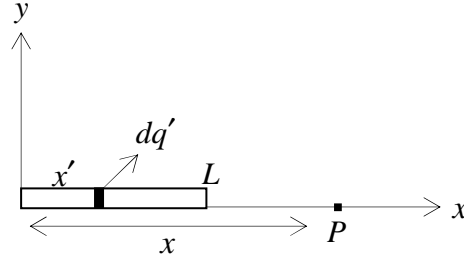


**Solución:**

a) Calcule el campo eléctrico producido por la varilla de la izquierda a una distancia  $x > L$  sobre el eje  $x$ , es decir, justo en la región donde se encuentra la varilla de la derecha.



El campo eléctrico viene dado por  $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ . Se elige el origen del sistema de referencia en el origen del sistema  $(x, y)$ .



El diferencial de carga viene dado por  $dq' = \lambda_0 dx'$ . Además, según la figura, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ , vienen dados por  $\vec{r} = x\hat{i}$  y  $\vec{r}' = x'\hat{i}$ . Luego,  $(\vec{r} - \vec{r}') = (x - x')\hat{i}$ , y el campo eléctrico queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (x - x')}{|x - x'|^3} \hat{i} = \int \frac{k \lambda_0 dx'}{(x - x')^2} \hat{i}$$

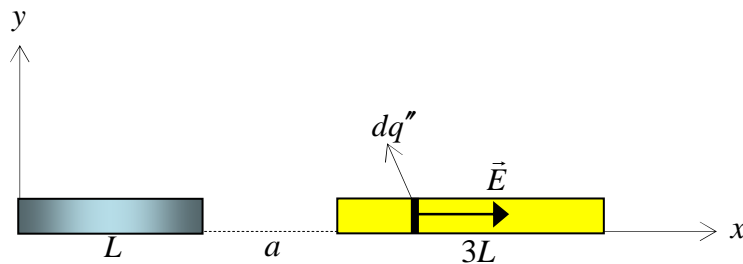
en módulo, el campo eléctrico queda

$$E(x) = k \lambda_0 \int_{x'=0}^{x'=L} \frac{dx'}{(x - x')^2} = k \lambda_0 \left( \frac{1}{(x - x')} \right)_{x'=0}^{x'=L} = k \lambda_0 \left( \frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right)$$

Finalmente, el campo eléctrico en la región donde está la segunda varilla viene dado por

$$E(x) = k \lambda_0 \left( \frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right) \quad (1.6)$$

b) Calcule la fuerza eléctrica resultante ejercida por la varilla de la izquierda sobre la varilla de la derecha.



### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

Sobre cada diferencial de carga  $dq''$  de la varilla de la derecha, actúa un campo eléctrico  $\vec{E}$ , horizontal de magnitud  $E(x) = k\lambda_0 \left( \frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right)$ . Usando la densidad lineal de carga  $\lambda_2 = \beta x$  de la varilla de la derecha, podemos escribir la fuerza diferencial  $d\vec{F}$  sobre la carga diferencial  $dq''$  en la forma

$$d\vec{F} = \vec{E}dq'' = \vec{E}\lambda_2 dx$$

en módulo, se tiene  $dF = E\lambda_2 dx = E(\beta x) dx$ . Reemplazando el campo externo dado por relación (1.6) creado por la varilla de la izquierda, se tiene

$$dF = k\lambda_0 \left( \frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) (\beta x) dx$$

La fuerza resultante sobre la varilla de la derecha viene dada por superposición de las fuerzas individuales:

$$F = \int dF = k\lambda_0\beta \left\{ \int_{x=(L+a)}^{x=(4L+a)} \frac{xdx}{x-L} - \int_{x=(L+a)}^{x=(4L+a)} \frac{xdx}{x} \right\} \quad (1.7)$$

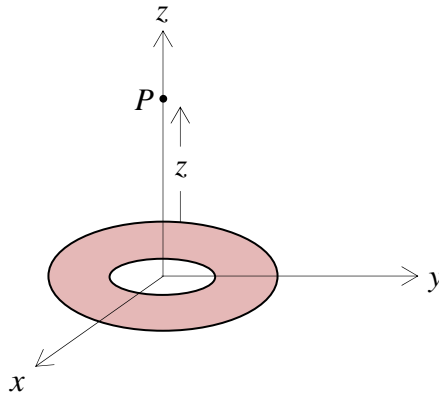
$$F = k\lambda_0\beta \left\{ \left[ (x-L) + L \ln(x-L) \right]_{x=(L+a)}^{x=(4L+a)} - \left[ x \right]_{x=(L+a)}^{x=(4L+a)} \right\}$$

$$F = k\lambda_0\beta \left\{ 3L + L \ln \frac{(3L+a)}{a} - 3L \right\}$$

$$F = k\lambda_0\beta L \ln \left( \frac{3L+a}{a} \right) \quad (1.8)$$

3. Considere una lámina plana de carga en la forma que se muestra en la figura. Los círculos tienen radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , y la densidad superficial de carga vale  $\sigma = \frac{\alpha}{r}$ , donde  $\alpha$  es constante. En el punto  $P$ , a una distancia  $z$  sobre la lámina, calcule,

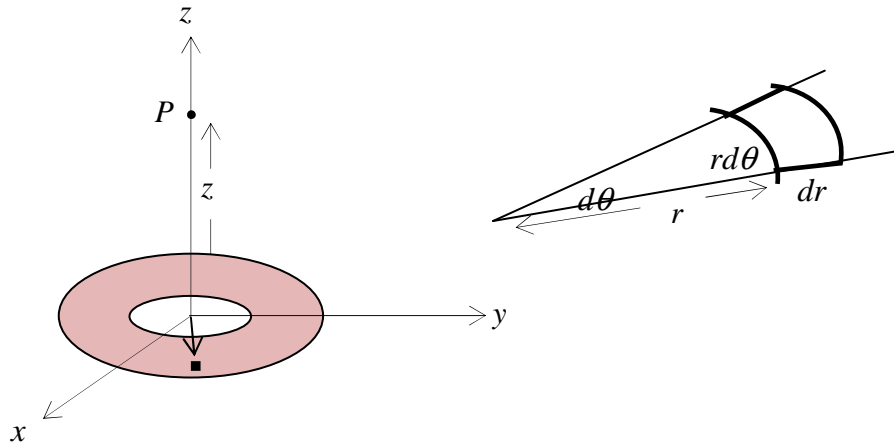
- el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$
- el Potencial electrostático  $V(\vec{r})$ .



**Solución:**

Cálculo del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ .

Consideremos un elemento diferencial de carga  $dq'$  que se encuentra ubicado en la placa en un elemento diferencial de superficie  $dS$ .



Dado que  $\sigma = \frac{dq'}{dS}$ , se tiene que  $dq' = \sigma dS$ . Pero  $\sigma = \left(\frac{\alpha}{r}\right)$ , luego,  $dq' = \left(\frac{\alpha}{r}\right) dS$ . El diferencial de superficie de la placa viene dado por  $dS = ds dr = (r d\theta) dr$  (ver figura más arriba). Por lo tanto,  $dq'$  queda  $dq' = \alpha dr d\theta$ . La variable  $r$  varía desde  $r = a$  hasta  $r = b$ , y la variable  $\theta$  varía desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = 2\pi$ .

Los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por  $\vec{r} = z\hat{k}$ ,  $\vec{r}' = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}$ . Con esos valores se tiene

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}), \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Reemplazando en la expresión del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ , obtenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int \frac{k \alpha dr d\theta (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k})}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

separando integrales

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k\alpha \int \frac{r dr \cos \theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{i} - k\alpha \int \frac{r dr \sin \theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{j} + k\alpha z \int \frac{dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (1.9)$$

Las integrales sobre  $\theta$  y sobre  $r$  se pueden hacer por separado. Sin embargo, las dos primeras integrales sobre la parte angular valen cero, es decir,

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

Por lo tanto, las dos primeras integrales de la relación (1.9) se anulan. En consecuencia, el campo eléctrico sólo tiene componente  $z$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\alpha z \int \frac{dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = 2\pi k\alpha z \int \frac{dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Integrando la parte radial, se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2\pi k\alpha}{z} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \hat{k} \quad (1.10)$$

Cálculo del potencial eléctrico  $V(\vec{r})$ .

El potencial viene dado por  $V(\vec{r}) = \int \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int \frac{k \alpha dr d\theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ . Usando los datos calculados anteriormente, escribimos

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= k\alpha \int_{r=a}^{r=b} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta \\ V(\vec{r}) &= 2\pi k\alpha \int_{r=a}^{r=b} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi k\alpha \left[ \ln 2 \left( \sqrt{r^2 + z^2} + r \right) \right]_a^b \\ V(\vec{r}) &= 2\pi k\alpha \left[ \ln \left( \sqrt{b^2 + z^2} + b \right) - \ln \left( \sqrt{a^2 + z^2} + a \right) \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Formas alternativas de resolver el problema

Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial.

Calculemos ahora el campo eléctrico a partir del potencial usando la relación

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= -\frac{dV(z)}{dz} \\ \vec{E}(z) &= -\frac{dV(z)}{dz} = -2\pi k\alpha \frac{d}{dz} \left[ \ln(\sqrt{b^2 + z^2} + b) - \ln(\sqrt{a^2 + z^2} + a) \right] \\ \vec{E}(z) &= -2\pi k\alpha z \left[ \frac{1}{(\sqrt{b^2 + z^2} + b)\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{(\sqrt{a^2 + z^2} + a)\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \quad (1.12)\end{aligned}$$

Amplificando arriba y debajo de cada término, podemos lograr la misma forma del campo eléctrico obtenida antes.

$$\begin{aligned}\left( \frac{1}{(\sqrt{b^2 + z^2} + b)\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \left( \frac{(\sqrt{b^2 + z^2} - b)}{(\sqrt{b^2 + z^2} - b)} \right) &= \frac{(\sqrt{b^2 + z^2} - b)}{z^2 \sqrt{b^2 + z^2}} \\ \left( \frac{1}{(\sqrt{a^2 + z^2} + a)\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \left( \frac{(\sqrt{a^2 + z^2} - a)}{(\sqrt{a^2 + z^2} - a)} \right) &= \frac{(\sqrt{a^2 + z^2} - a)}{z^2 \sqrt{a^2 + z^2}}\end{aligned}$$

Reemplazando estos resultados en (1.12), se tiene,

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= -2\pi k\alpha z \left[ \frac{(\sqrt{b^2 + z^2} - b)}{z^2 \sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{(\sqrt{a^2 + z^2} - a)}{z^2 \sqrt{a^2 + z^2}} \right] \\ \vec{E}(z) &= -\frac{2\pi k\alpha}{z} \left[ 1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \\ \vec{E}(z) &= \frac{2\pi k\alpha}{z} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \quad (1.13)\end{aligned}$$

Este resultado es idéntico al obtenido usando la ley de Coulomb en relación (1.10).

Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico.

El potencial viene dado por  $V(\vec{r}) = -\int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

Usando el campo (1.13), se tiene

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

$$V(z) = - \int_{ref}^r E dz = - \int_{ref}^r \frac{2\pi k \alpha}{z} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] dz$$

$$V(z) = -2\pi k \alpha \left[ \int \frac{b dz}{z \sqrt{b^2 + z^2}} - \int \frac{a dz}{z \sqrt{a^2 + z^2}} \right]$$

$$V(z) = -2\pi k \alpha \left[ \left[ \ln(bz) - \ln \left( 2 \left( b \sqrt{a^2 + z^2} + b^2 \right) \right) \right] - \left[ \ln(az) - \ln \left( 2 \left( a \sqrt{a^2 + z^2} + a^2 \right) \right) \right] \right]$$

Reordenando se obtiene el mismo resultado que la expresión (1.11)

$$V(\vec{r}) = 2\pi k \alpha \left[ \ln \left( \sqrt{b^2 + z^2} + b \right) - \ln \left( \sqrt{a^2 + z^2} + a \right) \right] \quad (1.14)$$

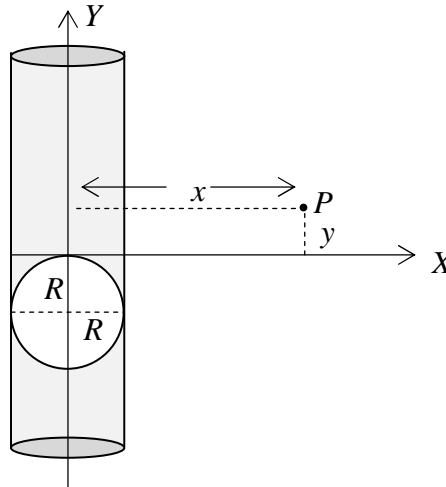
Solucionario

Primera Prueba de Cátedra

Electromagnetismo FI-604

Semestre de Primavera 2014

1. Se tiene una distribución de carga cilíndrica muy larga, de radio  $R$ , con densidad volumétrica de carga  $\rho = cte$ . En la posición que se muestra en la figura existe un agujero esférico de radio  $R$ . Calcule:
  - a) el vector campo eléctrico resultante  $\vec{E}_R = E_{R,x}\hat{i} + E_{R,y}\hat{j}$  en el punto  $P(x, y)$ .
  - b) La diferencia de potencial electrostático entre el punto  $P$  y la superficie del cilindro.



**Solución.**

Usaremos el principio de superposición de los campos creados por un cilindro muy largo de radio  $R$ , lleno de carga positiva, y una esfera de radio  $R$  llena de carga, pero con signo negativo.

**Campo eléctrico creado por el cilindro:**

Para calcular el campo eléctrico en el punto  $P$ , usaremos una Gaussiana cilíndrica de radio  $x$  que pasa justo por el punto  $P$ . Aplicando ley de Gauss, se tiene:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV_{cil} \quad (15)$$

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

Dado que  $\rho = cte$ , y que  $dV_{cil} = 2\pi L r dr$ , y dado además que  $\vec{E}$  es paralelo a  $d\vec{S}_{manto}$  y a que  $|\vec{E}| = cte$  sobre el manto cilíndrico, se tiene

$$E \int_0^x dS_{manto} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \rho 2\pi L r dr \quad (16)$$

La integral sobre el volumen se hace sólo hasta  $r = R$ , ya que la carga sólo existe hasta ese punto. Además, sabemos que  $dS_{manto} = 2\pi L dr$ , luego,

$$E \int_0^x 2\pi L dr = \frac{\rho 2\pi L}{\epsilon_0} \int_0^R r dr \quad (17)$$

Finalmente, el módulo del campo eléctrico producido por el cilindro lleno viene dado por:

$$E_{cil} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} \quad (18)$$

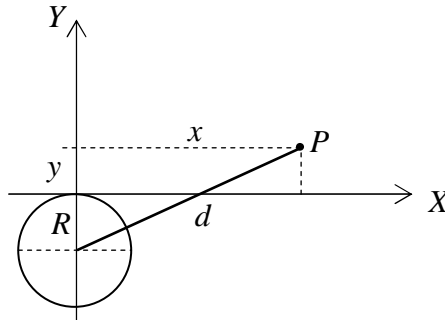
Dado que la carga del cilindro es positiva, el vector  $\vec{E}_{cil}$  justo en el punto  $P$ , viene dado por

$$\vec{E}_{cil} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} \hat{i} \quad (19)$$

Campo eléctrico creado por la esfera con carga negativa:

El campo eléctrico fuera de una esfera es igual al campo creado por una carga puntual igual a la carga de la esfera  $q_{esf}$ , es decir,

$$E_{esf} = \frac{q_{esf}}{4\pi\epsilon_0 d^2} \quad (20)$$



En este caso  $d$  es la distancia del centro de la esfera al punto  $P$ , y viene dada por.

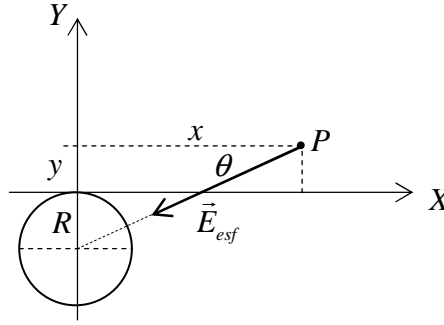


$$d = \sqrt{x^2 + (y + R)^2} \quad (21)$$

La carga de la esfera viene dada por  $q_{esf} = \rho V_{esf} = \rho \frac{4\pi R^3}{3}$ . Por lo tanto, el módulo del campo eléctrico creado por la esfera vale

$$E_{esf} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 d^2} \quad (22)$$

Dado que el agujero esférico se puede considerar como una esfera llena con carga negativa, el vector campo eléctrico de la esfera  $\vec{E}_{esf}$  apunta hacia el centro de la esfera a lo largo de la línea de largo  $d$ .



El vector  $\vec{E}_{esf}$  hace un ángulo  $\theta$  hacia abajo del eje horizontal, tal como se muestra en la figura. Este ángulo es conocido

$$\cos \theta = \frac{x}{d}; \quad \sin \theta = \frac{(y + R)}{d} \quad (23)$$

Usando  $\theta$ , el vector  $\vec{E}_{esf}$ , se puede escribir como

$$\vec{E}_{esf} = -E_{esf} \cos \theta \hat{i} - E_{esf} \sin \theta \hat{j} \quad (24)$$

Usando (23), se tiene

$$\vec{E}_{esf} = -\frac{E_{esf}}{d} (x \hat{i} + (y + R) \hat{j}) \quad (25)$$

Reemplazando el modulo  $E_{esf}$  dado por (22), se tiene

$$\vec{E}_{esf} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 d^3} (x \hat{i} + (y + R) \hat{j}) \quad (26)$$

Usando el valor de  $d$  dado por (21), tiene finalmente el vector campo eléctrico de la esfera en el punto  $P$ :

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

$$\vec{E}_{esf} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}} \left(x\hat{i} + (y+R)\hat{j}\right) \quad (27)$$

El vector resultante de la superposición de los campos creados por el cilindro y el agujero esférico queda de la siguiente forma:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_{cil} + \vec{E}_{esf} \quad (28)$$

Reemplazando los campos obtenidos en (19) y (28), se tiene el resultado final

$$\vec{E}_R = \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x}\hat{i}\right) + \left(-\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}} \left(x\hat{i} + (y+R)\hat{j}\right)\right) \quad (29)$$

Reordenando, se obtiene el vector campo eléctrico resultante:

$$\vec{E}_R = \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} - \frac{\rho R^3 x}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}}\right)\hat{i} - \frac{\rho R^3 (y+R)}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}}\hat{j} \quad (30)$$

b) Cálculo de la diferencia de potencial entre el punto  $P$  y la superficie del cilindro

La diferencia de potencial viene dada por  $\Delta V = -\int_x^R \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Como la diferencia de potencial

electrostática no depende de la trayectoria seguida entre los puntos, elegimos viajar desde  $P$  hasta  $R$ , el borde del cilindro, a lo largo del eje  $X$ , usando una trayectoria hacia el origen, es decir, hacemos  $d\vec{l} = -dx\hat{i}$ . Entonces el producto punto entre  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  queda:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot (-dx\hat{i}) = -E_x dx \quad (31)$$

donde  $E_x$  es la componente  $x$  del campo eléctrico resultante dada por (30), luego,

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} - \frac{\rho R^3 x}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}}\right) dx \quad (32)$$

Entonces la diferencia de potencial queda

$$\Delta V = \int_x^R \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} - \frac{\rho R^3 x}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}}\right) dx \quad (33)$$

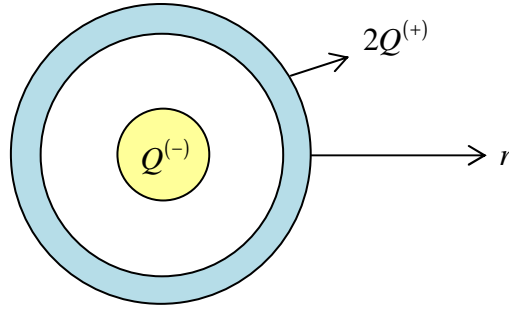
$$\Delta U = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_x^R \frac{1}{x} dx - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_x^R \frac{x}{\left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}} dx \quad (34)$$

Integrando, obtenemos la diferencia de potencial pedida:

$$\Delta V = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{x}\right) + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + (y+R)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+R)^2}} \right) \quad (35)$$

### Equation Chapter (Next) Section 1

2. Sobre las regiones metálicas esféricas mostradas en la figura, se distribuyen las cargas que se indican. La esfera metálica interior de radio  $a$  es maciza y tiene una carga  $Q^{(-)}$ . El cascarón metálico tiene radio interior  $b$  y radio exterior  $c$ , y tiene una carga  $2Q^{(+)}$  en su superficie. Entre los metales no existe carga.



- Hallar, como función de la distancia radial  $r$ , el campo eléctrico en todas las regiones.
- Calcule la diferencia de potencial  $\Delta V_{ab} = (V_b - V_a)$ , entre la esfera interior y el cascarón metálico exterior.

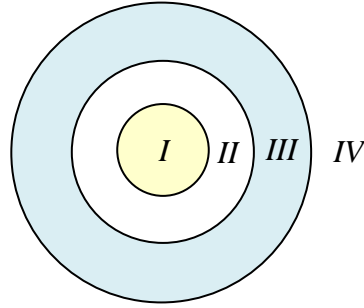
### Solución.

- Hallar, como función de la distancia radial  $r$ , el campo eléctrico en todas las regiones. Calcularemos el campo eléctrico en cada región usando ley e Gauss. Sin embargo, sabemos que el campo eléctrico vale cero dentro de los metales en el caso estático. Por lo tanto calcularemos sólo los campos en las regiones *II* y *IV*.

Las regiones vienen definidas de la siguiente forma:

$$I : 0 < r < a; \quad II : a < r < b; \quad III : b < r < c; \quad IV : r > c \quad (1)$$

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas



Región  $I : 0 < r < a$  : dentro del metal.

Dentro un metal el campo siempre vale cero. En este caso no existe carga al interior de la superficie metálica, por eso no existe campo eléctrico, luego,

$$E_1 = 0 \quad (2)$$

Región  $II : a < r < b$  : entre los metales.

Usamos una Gaussiana esférica de radio  $a < r < b$  que encierra a la carga negativa  $Q^{(-)}$ . La ley de Gauss queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{-Q}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Dado que la carga de la esfera metálica interior es negativa, el campo eléctrico en esta región apunta radialmente hacia el centro de la esfera. Sin embargo, la diferencial de superficie sobre la esfera Gaussiana apunta radialmente hacia afuera, luego, el producto punto resulta negativo, es decir,  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = -EdS$ . Reemplazando en (3), se tiene

$$-\oint EdS = \frac{-Q}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\oint EdS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Sobre la Gaussiana, el módulo del campo eléctrico es constante, luego no depende de la superficie y se puede sacar del signo integral.

$$ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6)$$

La superficie  $S$  de la esfera de radio  $a < r < b$ , vale  $S = 4\pi r^2$ . Reemplazando en (6), se tiene el campo eléctrico en la región  $II$  :

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7)$$

Vectorialmente este campo apunta radialmente hacia el centro, luego

$$\vec{E}_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \quad (8)$$

donde  $\hat{e}_r$  es el vector unitario que apunta radialmente hacia fuera.

Región III :  $b < r < c$  : dentro del cascarón metálico.

Dentro un metal el campo siempre vale cero. En este caso, la carga neta al interior de la superficie Gaussiana es la suma de la carga de la esfera interior, más la carga inducida en el cascarón metálico, la cual es de igual magnitud, pero de signo opuesto que la carga de la esfera interior. Por lo tanto, la carga neta encerrada en la Gaussiana es cero. En consecuencia, el campo eléctrico se anula al interior del cascarón metálico, luego,

$$E_3 = 0 \quad (9)$$

Región IV :  $r > c$  : fuera de la distribución de cargas.

Usamos una Gaussiana esférica de radio  $r > c$  que encierra a la carga negativa  $Q^{(-)}$  más la carga positiva  $2Q^{(+)}$ . En consecuencia, la carga neta encerrada vale  $q_{neta} = -Q + 2Q = Q$ .

La ley de Gauss queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{-Q + 2Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (10)$$

Dado que la carga neta es positiva, el campo eléctrico en esta región apunta radialmente hacia fuera, el módulo del campo eléctrico en esta región IV, vale,

$$E_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (11)$$

Vectorialmente este campo apunta radialmente hacia afuera de las esferas, luego

$$\vec{E}_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \quad (12)$$

donde  $\hat{e}_r$  es el vector unitario que apunta radialmente hacia fuera.

b) Calcule la diferencia de potencial entre la esfera interior y el cascarón metálico exterior. La diferencia de potencial entre la esfera interior de radio  $a$  y el cascarón exterior de radio  $b$ , viene dada por

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = -\int_a^b \vec{E}_2 \cdot (\hat{e}_r dr) \quad (13)$$

Si viajamos a lo largo de una línea radial desde  $a$  hasta  $b$ , escribimos  $d\vec{l} = d\vec{r} = \hat{e}_r dr$ :

Reemplazando el valor del campo eléctrico  $\vec{E}_2$  en la región II, se tiene:

$$\Delta V = -\int_a^b \left( -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \right) \cdot (\hat{e}_r dr) \quad (14)$$

$$\Delta V = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \int_a^b \frac{dr}{r^2} \quad (15)$$

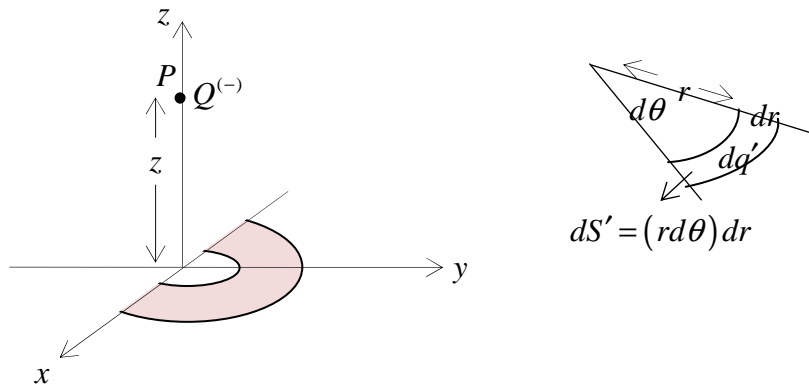
$$\Delta V = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{-1}{r} \right)_a^b \quad (16)$$

Finalmente, la diferencia de potencial pedida vale:

$$\Delta V = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (17)$$

### Equation Chapter (Next) Section 1

3. a) Calcule la fuerza sobre una carga negativa  $Q^{(-)}$  ubicada en el punto  $P$ , ejercida por una corona semicircular de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , localizada tal como se muestra en la figura.



La densidad superficial de carga de la lámina vale  $\sigma = \left( \frac{\beta}{r} \right)$ . La carga  $Q^{(-)}$  está localizada en el punto de coordenadas  $(0, 0, z)$

b) Calcule el potencial electrostático creado por la corona semicircular en el punto  $P$ .

**Solución.**

a) Cálculo de la fuerza sobre  $Q^{(-)}$ .

La carga diferencial  $dq'$  viene dada por  $dq' = \sigma dS' = \sigma(r dr d\theta)$ . Pero  $\sigma = \left(\frac{\beta}{r}\right)$ , por lo tanto,

$$dq' = \left(\frac{\beta}{r}\right)(r dr d\theta) = \beta dr d\theta \quad (1)$$

Por otra parte, de acuerdo a los ejes coordenados, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por:

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad (2)$$

$$\vec{r}' = (r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}) \quad (3)$$

Luego,

$$(\vec{r} - \vec{r}') = (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}) \quad (4)$$

y su módulo vale

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 + z^2} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + z^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Entonces, el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int \frac{k dq' (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k})}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6)$$

Reemplazando  $dq'$  dada por (1), se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\beta \int \frac{dr d\theta (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k})}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (7)$$

Separando integrales, tenemos

$$E_x = -k\beta \int \frac{r dr \cos \theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (8)$$

$$E_y = -k\beta \int \frac{r dr \sin \theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (9)$$

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

$$E_z = kz\beta \int \frac{dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (10)$$

Las coordenadas  $r$  y  $\theta$  varían de manera independiente, por lo tanto podemos separar las integrales. La corona se forma cuando  $\theta$  varía entre  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , y cuando  $r$  varía entre  $r = a$  y  $r = b$ . En consecuencia, escribimos,

$$E_x = -k\beta \int_a^b \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^\pi \cos \theta d\theta \quad (11)$$

$$E_y = -k\beta \int_a^b \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \quad (12)$$

$$E_z = kz\beta \int_a^b \frac{dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\theta \quad (13)$$

Haciendo primero las integrales sobre  $\theta$ , se obtiene

$$\int_0^\pi \cos \theta d\theta = \sin \theta \Big|_0^\pi = 0; \quad \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^\pi = 2; \quad \int_0^\pi d\theta = \theta = \pi \quad (14)$$

Usando estos resultados, las componentes del campo eléctrico dadas por (11), (12) y (13), quedan

$$E_x = 0 \quad (15)$$

Por simetría sabíamos que la componente  $x$  del campo eléctrico  $E_x$  debía anularse,  $E_x = 0$ .

$$E_y = -2k\beta \int_a^b \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (16)$$

$$E_z = \pi kz\beta \int_a^b \frac{dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (17)$$

Ahora hacemos las integrales sobre  $r$  y se obtiene:

$$E_y = (-2k\beta) \left( -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)_a^b = (2k\beta) \left( \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (18)$$

$$E_z = \left( \frac{\pi kz\beta}{z^2} \right) \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)_a^b = \left( \frac{\pi k\beta}{z} \right) \left( \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (19)$$



En consecuencia, el vector campo eléctrico resultante viene dado por

$$\vec{E}(z) = (2k\beta) \left( \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{j} + \left( \frac{\pi k \beta}{z} \right) \left( \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k} \quad (20)$$

Entonces, la fuerza sobre la carga  $Q^{(-)}$  viene dada por:

$$\vec{F} = -Q\vec{E}(z) \quad (21)$$

El signo menos aparece porque la carga es negativa, lo cual implica que la fuerza es de atracción.

b) Calcule el potencial electrostático creado por la corona semicircular en el punto  $P$ .

El potencial electrostático viene dado por la expresión

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (22)$$

donde  $dq'$  y  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  vienen dados por las expresiones obtenidas en el cálculo del campo eléctrico, relaciones (1) y (5). Por lo tanto, (22) queda

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k \beta dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (23)$$

Integrando primero sobre  $\theta$  desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$ , tenemos

$$V(\vec{r}) = \pi k \beta \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (24)$$

La integral sobre  $r$  vale

$$V(\vec{r}) = \pi k \beta \ln \left( r + \sqrt{r^2 + z^2} \right) \Big|_a^b \quad (25)$$

Finalmente, la diferencia de potencial pedido vale,

$$V(\vec{r}) = \pi k \beta = \pi k \beta \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{a + \sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (26)$$

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

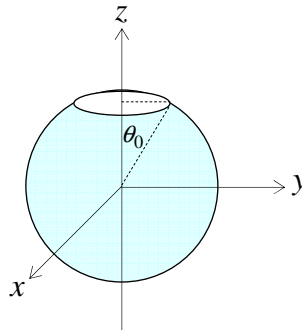
#### Solucionario

#### Primera Prueba de Cátedra

#### Electromagnetismo

Semestre de Primavera 2013

1. (Obligatorio) Hallar el potencial electrostático  $V(z)$  y el campo eléctrico  $E(z)$  a lo largo del eje de simetría  $z$ , para puntos fuera del cascarón esférico de radio  $R$  al cual le falta la parte superior, tal como se muestra en la figura. El ángulo de la parte faltante vale  $\theta_0 = (\pi/4)$ . El casquete esférico resultante posee una densidad superficial de carga constante  $\sigma$ .



#### Solución:

Calcularemos el potencial electrostático  $\phi(z)$ , y a partir de esa solución calcularemos el campo eléctrico  $E(z)$ .

Potencial electrostático:

El potencial viene dado por la expresión:

$$V(z) = k \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (27)$$

Si ubicamos el origen del sistema de referencia en el centro de la esfera y usamos coordenadas polares, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad (28)$$

donde  $z$  es un parámetro y no cambia durante el cálculo del potencial. El vector  $\vec{r}'$  denota la posición de un elemento diferencial de carga  $dq$  en la superficie del casquete esférico, luego

$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k} \quad (29)$$

Usando las relaciones de transformación a coordenadas polares, se tiene

$$\vec{r}' = R \sin \theta \cos \phi \hat{i} + R \sin \theta \sin \phi \hat{j} + R \cos \theta \hat{k} \quad (30)$$

luego,

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R \sin \theta \cos \phi \hat{i} - R \sin \theta \sin \phi \hat{j} + (z - R \cos \theta) \hat{k} \quad (31)$$

y su módulo viene dado por

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta} \quad (32)$$

Como se trata de un cascarón esférico con distribución de carga superficial dada por la densidad  $\sigma$ , el diferencial de carga viene dado por

$$dq = \sigma dA = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (33)$$

Reemplazando (32) y (33) en (27), se tiene la expresión del potencial:

$$V(z) = k \int \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta}} \quad (34)$$

Para recorrer todo el casquete definido en el problema, el ángulo  $\phi$  debe variar entre  $\phi = 0$

y  $\phi = 2\pi$  y el ángulo  $\theta$  debe variar entre  $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$  y  $\theta = \pi$ . El radio  $R$  del casquete

esférico es constante. Escribamos explícitamente las integrales con sus límites:

$$V(z) = k\sigma R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/4}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta}} \quad (35)$$

La integral en  $\phi$  vale  $2\pi$ , y la integral en  $\theta$  vale:

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta}} = \frac{1}{Rz} \sqrt{R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta} \Big|_{\pi/4}^{\pi} \quad (36)$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta}} = \frac{1}{Rz} \left[ |R+z| - \sqrt{R^2 + z^2 - \sqrt{2}zR} \right] \quad (37)$$

Dado que  $z > 0$ , el potencial electrostático queda:

$$V(z) = \frac{2\pi k\sigma R}{z} \left[ R+z - \sqrt{R^2 + z^2 - \sqrt{2}zR} \right] \quad (38)$$

Campo eléctrico:

Obtendremos el campo eléctrico a través de la relación  $\vec{E} = -\nabla V$ . Dado que el potencial  $\phi$  depende sólo del parámetro  $z$ , el campo viene dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{k} \frac{d\phi(z)}{dz} \quad (39)$$

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

Antes de derivar, reescribamos el potencial en la forma más útil para la derivación:

$$V(z) = 2\pi k \sigma R \left[ 1 + \left( \frac{R}{z} \right) - \sqrt{1 - \sqrt{2} \left( \frac{R}{z} \right) + \left( \frac{R}{z} \right)^2} \right] \quad (40)$$

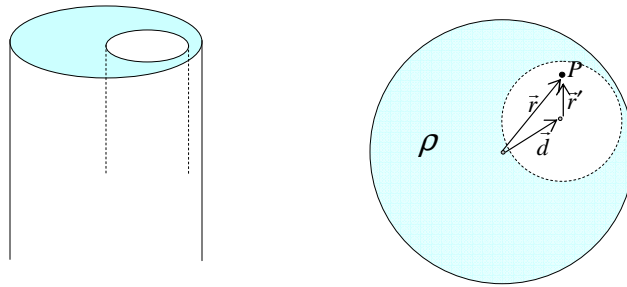
El campo eléctrico queda

$$\vec{E}(z) = 2\pi k \sigma R \left[ \frac{R}{z^2} + \frac{\sqrt{2}Rz - 2z^2}{2z^3 \sqrt{1 - \sqrt{2} \left( \frac{R}{z} \right) + \left( \frac{R}{z} \right)^2}} \right] \hat{k} \quad (41)$$

#### Equation Section (Next)

2. (Obligatorio) Una distribución de carga cilíndrica con densidad volumétrica de carga  $\rho$  constante, muy larga y de radio  $R$ , tiene un agujero cilíndrico muy largo de radio  $a$ . Hallar el campo eléctrico en un punto  $P$  cualquiera al interior del agujero cilíndrico. Exprese el resultado en función del vector  $\vec{d}$  que une los centros de los cilindros.

**Hint:** Después de calcular los campos eléctricos, escríbalos vectorialmente en función de los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  que parten del centro de los cilindros y llegan al punto  $P$ , tal como se muestra en la figura.



#### Solución:

Dado que el punto  $P$  se encuentra en la parte interior de ambos cilindros, sólo necesitamos calcular el campo en el interior de un cilindro usando ley de Gauss. Usemos una Gaussiana cilíndrica de radio  $r$  y altura  $h$ , donde  $r$  es menor que el radio  $R_0$  de un cilindro con densidad volumétrica de carga constante  $\rho$ . Si el cilindro es muy largo, no hay contribución de las tapas del cilindro Gaussiano a la integral de flujo, luego la ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \text{ queda:}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{manto}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

El campo eléctrico es constante sobre la superficie del manto cilíndrico y además es paralelo a la diferencial de superficie en cada punto, por lo tanto, podemos sacar al campo fuera de la integral

$$E 2\pi r h = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

donde  $h$  es la altura del cilindro Gaussiano. La carga neta encerrada dentro de la Gaussiana viene dada por

$$q_{\text{neta}} = \int \rho dV = \rho (\pi r^2 h) \quad (3)$$

Reemplazando en (2), se tiene

$$E 2\pi r h = \frac{\rho (\pi r^2 h)}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Simplificando, se obtiene el módulo del campo eléctrico en el interior de cualquier cilindro con densidad de carga  $\rho = \text{cte}$ .

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad (5)$$

Pero el campo eléctrico de un cilindro muy largo apunta radialmente, de manera perpendicular al eje del cilindro, por lo tanto, el campo eléctrico se escribe vectorialmente en la forma

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{2\epsilon_0} \quad (6)$$

Ahora que tenemos una expresión general para el campo eléctrico al interior de una distribución cilíndrica de carga, podemos aplicarla al problema en estudio.

Mirando la figura, el campo eléctrico  $\vec{E}_g$  del cilindro con densidad  $\rho$  viene dado por

$$\vec{E}_g = \frac{\rho \vec{r}}{2\epsilon_0} \quad (7)$$

El campo eléctrico  $\vec{E}_a$  del agujero cilíndrico viene dado por

$$\vec{E}_a = -\frac{\rho \vec{r}'}{2\epsilon_0} \quad (8)$$

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

donde el signo menos viene dado porque estamos considerando que el agujero cilíndrico tiene una densidad de carga negativa.

Por superposición, el campo resultante en el punto  $P$ , viene dado por

$$\vec{E}_R = \vec{E}_g + \vec{E}_a \quad (9)$$

$$\vec{E}_R = \frac{\rho \vec{r}}{2\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}'}{2\epsilon_0} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (10)$$

Pero,  $(\vec{r} - \vec{r}') = \vec{d}$ , luego

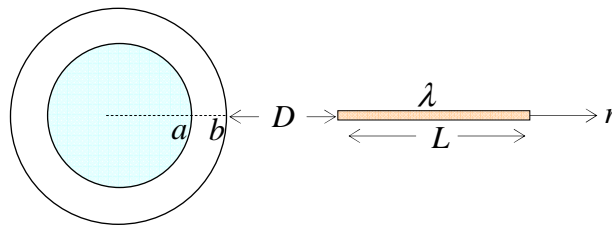
$$\vec{E}_R = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{d} \quad (11)$$

### Equation Section (Next)

3. Se tiene la siguiente distribución esférica de carga, dada por la densidad volumétrica carga:

$$\rho(r) = \begin{cases} \alpha r & \text{si } 0 < r < a \\ -\frac{\beta}{r} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases}$$

- Calcular el campo eléctrico en cada región.
- Hallar la fuerza  $F$  que ejerce una distribución esférica de carga sobre una varilla de largo  $L$ , con densidad lineal de carga  $\lambda = \lambda_0 + \beta r$ , localizada como la muestra la figura.
- ¿Qué relación debe cumplirse entre las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  para que la fuerza resultante sobre la varilla sea cero?



### Solución:

a) *Calcular el campo eléctrico en cada región.*

Dada la simetría del problema, usaremos Gaussianas esféricas para calcular los campos en cada región, como función de la distancia radial  $r$ .

Región con  $0 < r < a$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Dado que  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son paralelos sobre la superficie de la esfera, y dado que el módulo del campo eléctrico no varía sobre la superficie de la esfera, la ley de Gauss queda:

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r < a} \rho dV \quad (2)$$

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r < a} \alpha r (4\pi r^2 dr) \quad (3)$$

$$E_1 r^2 = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \int_0^{r < a} r^3 dr = \frac{\alpha r^4}{4\epsilon_0} \quad (4)$$

$$E_1 = \frac{\alpha r^2}{4\epsilon_0} \quad (5)$$

Región con  $a < r < b$ :

Del mismo modo que el caso anterior, la ley de Gauss queda:

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{a < r < b} \rho dV \quad (6)$$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \int_0^a \rho dV + \int_a^{a < r < b} \rho dV \right] \quad (7)$$

Usando las expresiones para la densidad de carga en cada región, escribimos,

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \int_0^a \alpha r dV - \int_a^{a < r < b} \frac{\beta}{r} dV \right] \quad (8)$$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \int_0^a r (4\pi r^2 dr) - \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_a^{a < r < b} \frac{(4\pi r^2 dr)}{r} \quad (9)$$

$$E_2 r^2 = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \int_0^a r^3 dr - \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_a^{a < r < b} r dr \quad (10)$$

$$E_2 r^2 = \frac{\alpha a^4}{4\epsilon_0} - \frac{\beta (r^2 - a^2)}{2\epsilon_0} \quad (11)$$

$$E_2 = \frac{1}{4\epsilon_0 r^2} (\alpha a^4 - 2\beta (r^2 - a^2)) \quad (12)$$

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

*Región con  $r > b$ :*

Del mismo modo que el caso anterior, la ley de Gauss queda:

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r>b} \rho dV \quad (13)$$

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \int_0^a \rho dV + \int_a^b \rho dV + \int_b^{r>b} \rho dV \right] \quad (14)$$

Dado que la densidad de carga existe solo hasta  $r = b$ , escribimos,

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \int_0^a \alpha r dV - \int_a^b \frac{\beta}{r} dV \right] \quad (15)$$

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \int_0^a r (4\pi r^2 dr) - \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_a^b \frac{(4\pi r^2 dr)}{r} \quad (16)$$

$$E_3 r^2 = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \int_0^a r^3 dr - \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_a^b r dr \quad (17)$$

$$E_3 r^2 = \frac{\alpha a^4}{4\epsilon_0} - \frac{\beta(b^2 - a^2)}{2\epsilon_0} \quad (18)$$

$$E_3 = \frac{1}{4\epsilon_0 r^2} (\alpha a^4 - 2\beta(b^2 - a^2)) \quad (19)$$

b) Hallar la fuerza  $F$  que ejerce una distribución esférica de carga sobre una varilla de largo  $L$ , con densidad lineal de carga  $\lambda = \lambda_0 + \beta r$ , localizada como la muestra la figura.

La fuerza que actúa sobre un elemento diferencial de carga  $dq$  de la varilla que está sobre el eje radial, viene dada en función del campo externo a la esfera  $E_3(r > b)$  que existe en la región donde está la varilla:

$$F = \int E_3 dq \quad (20)$$

Reemplazando el campo dado por (19) y la densidad lineal de carga de la varilla, se tiene

$$F = \int \frac{1}{4\epsilon_0 r^2} (\alpha a^4 - 2\beta(b^2 - a^2)) (\lambda_0 + \beta r) dr \quad (21)$$

Por simplicidad de notación, escribimos

$$C = \frac{1}{4\epsilon_0} (\alpha a^4 - 2\beta(b^2 - a^2)) \quad (22)$$



Las integrales quedan

$$F = C\lambda_0 \int_D^{D+L} \frac{dr}{r^2} + C\beta \int_D^{D+L} \frac{dr}{r} \quad (23)$$

$$F = C\lambda_0 \left( -\frac{1}{r} \right)_D^{D+L} + C\beta \ln r \Big|_D^{D+L} \quad (24)$$

$$F = C\lambda_0 \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D+L} \right) + C\beta \ln \left( \frac{D+L}{D} \right) \quad (25)$$

$$F = C\lambda_0 \left( \frac{L}{D(D+L)} \right) + C\beta \ln \left( \frac{D+L}{D} \right) \quad (26)$$

c) ¿Qué relación debe cumplirse entre las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  para que la fuerza resultante sobre la varilla sea cero?

Si la carga total contenida en las esferas es cero, entonces el campo eléctrico se anula fuera de la distribución de cargas y la fuerza sobre la varilla se hace cero, luego, basta exigir la condición  $C = 0$ , esto es,

$$C = \frac{1}{4\epsilon_0} (\alpha a^4 - 2\beta(b^2 - a^2)) = 0 \quad (27)$$

En consecuencia, la relación entre las constantes viene dada por:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{a^4} (b^2 - a^2) \quad (28)$$

Solucionario

Primera Prueba de Electromagnetismo

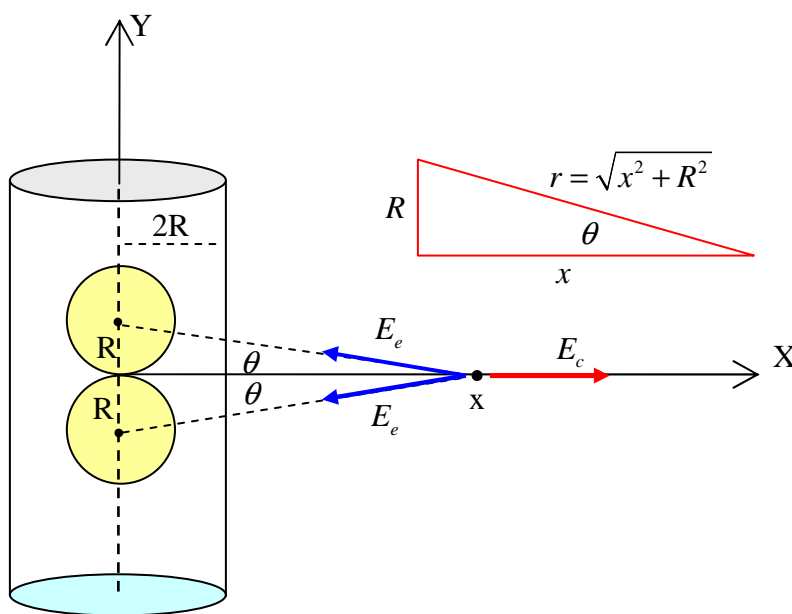
Ingeniería Plan Común

Semestre de Otoño, 2013

1.- Un cilindro *muy largo* de radio  $2R$  tiene una densidad volumétrica de carga  $\rho_0$  distribuida homogéneamente. Sobre su eje existen dos agujeros esféricos, cada uno de radio  $R$ .

a) Hallar el campo eléctrico  $E(x)$  sobre el eje  $X$  para valores de  $x > 2R$ .

b) Hallar la diferencia de potencial electrostático  $\Delta V = V(2R) - V(5R)$  entre los puntos  $x = 5R$  y  $x = 2R$



**Solución:**

1a) Hallar el campo eléctrico  $E(x)$  sobre el eje  $X$  para valores de  $x > 2R$ .

Usando el principio de superposición, el campo resultante viene dado por la siguiente expresión:

$\vec{E} = (E_c - 2E_e \cos \theta) \hat{i}$ , donde  $E_c$  es el módulo del campo del cilindro de radio  $2R$  y donde  $E_e$  es el módulo del campo creado por cada una de las esferas de radio  $R$ . La componente  $E_y$  del campo se anula por simetría.

Campo de un cilindro muy largo.

Se usa una Gaussiana de radio  $r > 2R$  y altura  $h$ :

$$\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_c 2\pi r h = \frac{\rho_0 V_{cilindro}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_c 2\pi r h = \frac{\rho_0 \pi (2R)^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_c = \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0 r}$$

En el punto  $x$  se cumple que  $r = x$ , luego el campo del cilindro vale:  $E_c(x) = \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0 x}$ .

Vectorialmente escribimos:  $\vec{E}_c(x) = \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0 x} \hat{i}$

Campo de una esfera. Se usa Gaussiana de radio  $r > R$ :

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_e 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 V_{esfera}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_e 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 4\pi R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E_e = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

En el punto  $x$  se cumple que  $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ , luego el módulo del campo eléctrico creado por la esfera en el punto  $x$  viene dado por:

$$E_e = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + R^2)}.$$

Vectorialmente escribimos para el campo creado por la esfera de arriba (up):

$$\vec{E}_e^{up}(x) = E_e (-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + R^2)} (-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$$

Vectorialmente escribimos para el campo creado por la esfera de abajo (down):

$$\vec{E}_e^{down}(x) = E_e (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + R^2)} (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})$$

Los vectores que representan a los campos creados por cada una de las esferas apuntan en dirección a cada esfera, porque al aplicar el principio de superposición consideramos que su densidad  $\rho_0$  es negativa.

El campo resultante en el punto  $x$  se obtiene sumando vectorialmente todos los campos, es decir, superponiendo todos los campos:

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

$$\vec{E} = \vec{E}_c(x) + \vec{E}_e^{up}(x) + \vec{E}_e^{down}(x)$$

Con lo cual se obtiene:  $\vec{E} = (E_c - 2E_e \cos \theta) \hat{i}$ , explícitamente se tiene:

$$\vec{E} = \left( \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0 x} - \frac{2\rho_0 R^3 \cos \theta}{3\epsilon_0 (x^2 + R^2)} \right) \hat{i}$$

Las componentes a lo largo del eje Y se anulan entre sí. El campo resultante sólo tiene componente a lo largo del eje X. De la figura se ve claramente que  $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$ ,

por lo tanto, el campo resultante del cilindro de carga con dos agujeros esféricos queda:

$$\vec{E} = \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{xR}{3(x^2 + R^2)^{3/2}} \right) \hat{i}$$

1b) Hallar la diferencia de potencial electrostático  $\Delta V = V(2R) - V(5R)$  entre los puntos  $x = 5R$  y  $x = 2R$

La diferencia de potencial se obtiene a través de la expresión:  $V(b) - V(a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

En este caso nos movemos a lo largo del eje  $x$ , por lo tanto, después de realizar el producto punto y cambiar la diferencial, escribimos:

$$\Delta V = V(2R) - V(5R) = - \int_{5R}^{2R} E(x) dx$$

Usando el campo obtenido anteriormente, nos queda:

$$\Delta V = V(2R) - V(5R) = - \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \int_{5R}^{2R} \left( \frac{1}{x} - \frac{xR}{3(x^2 + R^2)^{3/2}} \right) dx$$

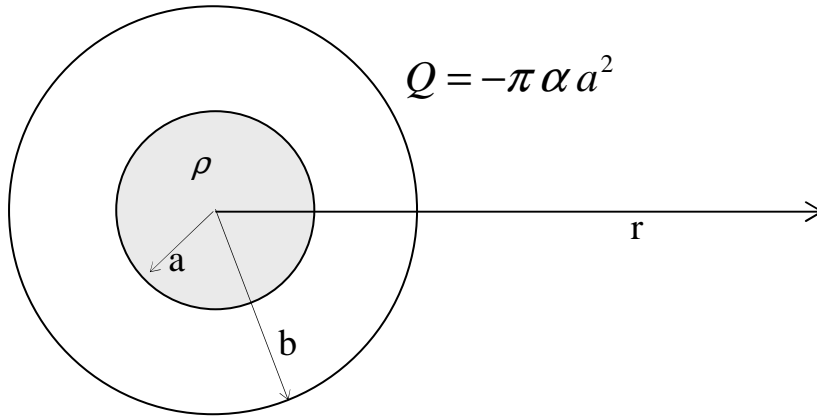
integrando

$$\Delta V = V(2R) - V(5R) = - \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left[ \ln x + \frac{R}{3\sqrt{x^2 + R^2}} \right]_{5R}^{2R}$$

Finalmente la diferencia de potencial queda:

$$\Delta V = V(2R) - V(5R) = - \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left[ \ln \frac{2}{5} + \frac{1}{3\sqrt{5}} - \frac{1}{3\sqrt{26}} \right]$$

2.- Hallar el campo eléctrico  $E(r)$  y el potencial electrostático  $V(r)$  en función de la distancia radial  $r$ , en cada una de las regiones, para la configuración formada por una esfera central de radio  $a$  con distribución de carga radialmente simétrica dada por  $\rho = \frac{\beta}{r}$  para  $0 < r \leq a$  con  $\beta = cte.$ , rodeada por un cascarón metálico entre  $r = a$  y  $r = b$  que lleva una carga  $Q = -\pi \alpha a^2$  en su superficie.



**Solución:**

2a) Cálculo del campo eléctrico

Se usará la ley de Gauss para calcular el campo en cada región:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$

Región I:  $0 < r \leq a$

Se usa una Gaussiana de radio  $r \leq a$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\int_0^{r \leq a} \rho(r) dV}{\epsilon_0}$$

Pero, la densidad volumétrica de carga depende de la distancia radial:  $\rho = \frac{\beta}{r}$  para  $0 < r \leq a$

con  $\beta = cte.$ , reemplazando en la integral y recordando que la diferencial de volumen de la esfera viene dada por  $dV = 4\pi r^2 dr$ , podemos escribir:

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r \leq a} \frac{\beta}{r} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\beta}{\epsilon_0} \int_0^{r \leq a} r dr = \frac{4\pi\beta r^2}{2\epsilon_0}$$

Simplificando se tiene finalmente  $E_I$  el campo eléctrico en la región I:

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

$$E_I = \frac{\beta}{2\epsilon_0}$$

Región II:  $a \leq r \leq b$

Se usa Gaussiana de radio  $a \leq r \leq b$ . En este caso sabemos que el campo eléctrico estático es cero en el interior de un conductor, por lo tanto:

$$E_{II} = 0$$

Es importante recordar que se produce inducción de cargas en el metal de modo que el campo en el interior es cero, es decir, de la ley de Gauss se infiere que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \Rightarrow 0 = q_{neta}, \text{ es decir, la carga neta encerrada en la Gaussiana debe ser cero,}$$

por lo que debe haber carga inducida  $Q_{ind}$  en la superficie interior del conductor, tal que la suma con la carga total interior  $q_{int}$  encerrada en la esfera de radio  $r = a$  debe ser cero:

$$q_i + Q_{ind} = 0. \text{ Vemos así que la carga inducida tiene la misma magnitud que la carga total}$$

$$\text{interior } q_{int} \text{ de la esfera de radio } r = a, \text{ a saber: } Q_{ind} = -q_i = -\int_0^a \frac{\beta}{r} 4\pi r^2 dr$$

Finalmente, la carga total  $q_{int}$  en la esfera interior de radio  $r = a$  vale

$$q_i = 2\pi\beta a^2$$

y la carga inducida en el metal vale:

$$Q_{ind} = -2\pi\beta a^2$$

Naturalmente que en la superficie exterior del metal aparece también la misma cantidad de carga inducida pero de signo opuesto, que modo tal que la suma de toda la carga inducida en el metal es cero.

Región III:  $b < r$

Se usa Gaussiana de radio  $b < r$ .

Debemos recordar que el sistema de esferas tiene dos tipos de cargas libres: la carga en la esfera interior recién calculada:  $q_i = 2\pi\beta a^2$  y la carga libre en la superficie exterior del metal:  $q_e = -\pi\alpha a^2$  de modo que la carga total encerrada en la Gaussiana de  $b < r$  viene dada por

$$q_{neta \text{ encerrada}} = q_i + q_e = 2\pi\beta a^2 - \pi\alpha a^2 = \pi a^2 (2\beta - \alpha).$$

Ahora aplicamos Gauss

$$E_{III} 4\pi r^2 = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} = \frac{\pi a^2 (2\beta - \alpha)}{\epsilon_0}$$

Finalmente, el campo fuera de las esferas viene dado por:

$$E_{III} = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$$

## 2b) Cálculo del potencial electrostático

Calcularemos el potencial como función de la distancia radial  $r$  usando la relación:

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Comenzaremos desde la región III hasta la región I

Región III:  $b < r$

En esta región el campo eléctrico vale  $E_{III} = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$ , por lo tanto, la integral queda

$$V_{III}(r) = - \int_{\infty}^{b < r} E_{III} dr = - \int_{\infty}^{b < r} \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} dr$$

Obteniéndose finalmente

$$V_{III}(r) = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r}$$

Región II:  $a \leq r \leq b$

En esta región la integral para calcular el potencial se debe separar en dos porque la integral atraviesa dos regiones distintas:

$$V_{II}(r) = - \int_{\infty}^{a < r < b} E dr = - \int_{\infty}^b E_{III} dr - \int_b^{a < r < b} E_{II} dr$$

Los campos en cada región son:  $E_{III} = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$  y  $E_{II} = 0$ . Reemplazando en la integral

anterior, tenemos

$$V_{II}(r) = - \int_{\infty}^b \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} dr - \int_b^{a < r < b} 0 dr = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b}$$

Finalmente:

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

$$V_{II}(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b}$$

Vemos así que el potencial en el interior del metal es constante, es decir, el conductor en estado estático siempre es un volumen equipotencial.

Región I:  $0 < r \leq a$

La integral del potencial se escribe

$$V_I(r) = - \int_{\infty}^{r < a} E dr = - \int_{\infty}^b E_{III} dr - \int_b^a E_{II} dr - \int_a^{r < a} E_I dr$$

Los campos en cada región son:  $E_{III} = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$ ,  $E_{II} = 0$  y  $E_I = \frac{\beta}{2\epsilon_0}$ , luego la integral queda

$$V_I(r) = - \int_{\infty}^b E_{III} dr - \int_a^{r < a} E_I dr$$

Reemplazando los campos

$$V_I(r) = - \int_{\infty}^b \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^{r < a} \frac{\beta}{2\epsilon_0} dr$$

Integrando se tiene el potencial en la región I:

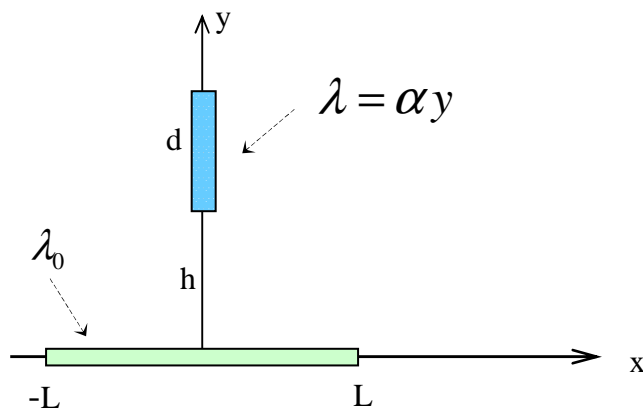
$$V_I(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} - \frac{\beta}{2\epsilon_0}(r - a)$$

En resumen, el potencial como función de  $r$  en cada región queda

$$V(r) = \begin{cases} V_I(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} - \frac{\beta}{2\epsilon_0}(r - a) & 0 < r \leq a \quad \text{región I} \\ V_{II}(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} & a \leq r \leq b \quad \text{región II} \\ V_{III}(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r} & b \leq r \quad \text{región III} \end{cases}$$

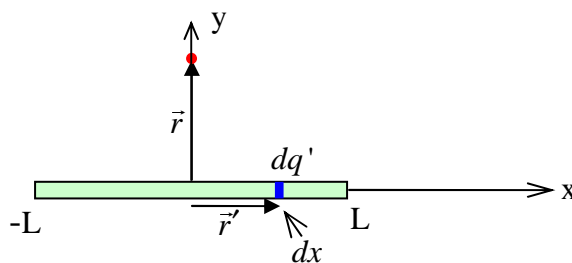
3.- (Problema obligatorio) Una varilla horizontal de largo  $2L$  tiene una densidad lineal de carga homogénea  $\lambda_0$ . Justo sobre su centro y a una altura  $h$  se encuentra una segunda varilla de largo  $d$  con densidad lineal de carga  $\lambda = \alpha y$ , con  $\alpha = cte$ . Calcule la fuerza resultante  $\vec{F}$  ejercida por la varilla horizontal sobre la varilla vertical.





### Solución:

Primero calculamos el campo eléctrico generado por una varilla horizontal de largo  $2L$  a una distancia variable  $y$  sobre su centro.



El campo eléctrico viene dado por la expresión  $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ . En este caso los

vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por:  $\vec{r} = y \hat{j}$  y  $\vec{r}' = x \hat{i}$ . Luego  $(\vec{r} - \vec{r}') = -x \hat{i} + y \hat{j}$  y su

módulo viene dado por  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . El campo se expresa entonces como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{dq (-x \hat{i} + y \hat{j})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pero la carga está distribuida homogéneamente en la varilla horizontal:  $dq = \lambda_0 dx$ , luego,

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{\lambda_0 dx (-x \hat{i} + y \hat{j})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

### 2.3.1 Unidad I: Solucionario de Pruebas

Integrando entre los límites  $-L$  y  $L$ , se tiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\lambda_0 \int_{-L}^L \frac{-xdx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} + k\lambda_0 y \int_{-L}^L \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{j}$$

Calculando cada integral, tenemos

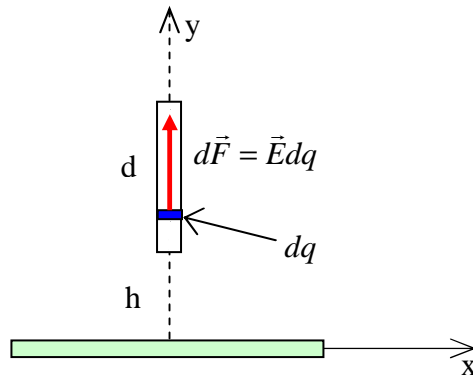
$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{i} k\lambda_0 \left. \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|_{-L}^L + \hat{j} k\lambda_0 y \left. \frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right|_{-L}^L$$

Sólo sobrevive la componente  $y$  del campo, ya que por argumentos de simetría vemos que la componente  $x$  debe anularse:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2k\lambda_0 L}{y\sqrt{L^2 + y^2}} \hat{j}$$

Calculemos ahora la fuerza ejercida por el campo eléctrico de la varilla horizontal sobre cada elemento de carga diferencial  $dq = \lambda dy = \alpha y dy$  del alambre vertical de largo  $d$ , ubicado a una altura  $h$  sobre la varilla de horizontal.

Sabemos que sobre cada elemento diferencial de carga de la varilla vertical se ejerce una fuerza diferencial dada por la siguiente expresión:  $d\vec{F} = \vec{E}dq = \vec{E}\alpha y dy$



Por lo tanto, la fuerza total sobre el alambre vertical viene dada por la integral desde  $y = h$  hasta  $y = h + d$

$$\vec{F} = \int_h^{h+d} \vec{E}dq = \int_h^{h+d} \frac{2k\lambda_0 L \alpha y dy}{y\sqrt{L^2 + y^2}} \hat{j}$$

Integrando

$$\vec{F} = 2k\lambda_0\alpha L \int_h^{h+d} \frac{dy}{\sqrt{L^2 + y^2}} \hat{j} = 2k\lambda_0\alpha L \ln \left( y + \sqrt{L^2 + y^2} \right)_h^{h+d} \hat{j}$$

Se tiene la fuerza pedida:

$$\vec{F} = 2k\lambda_0\alpha L \ln \left( \frac{h+d+\sqrt{L^2+(h+d)^2}}{h+\sqrt{L^2+h^2}} \right) \hat{j}$$



Equation Section (Next)

**2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas**

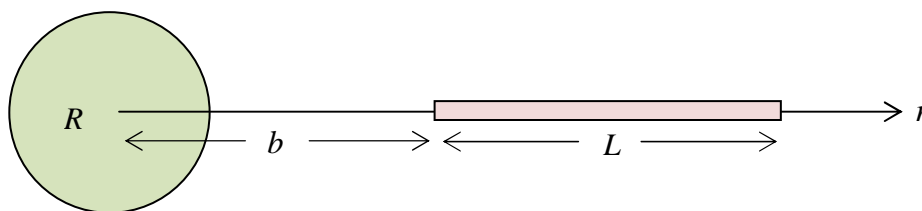
## Solucionario

Electromagnetismo FI-604

Semestre de Otoño 2011

Equation Chapter 1 Section 1

1.- Una esfera de radio  $R$  tiene una densidad volumétrica de carga  $\rho(r) = \frac{\beta}{r^2}$ . Calcule la fuerza eléctrica  $\vec{F}(\vec{r})$  ejercida por la esfera sobre una varilla cargada de largo  $L$  con densidad lineal de carga  $\lambda = \alpha r$ , ubicada sobre el eje radial, tal como se muestra en la figura.

**Solución.**

Aplicando la ley de Gauss a la esfera de radio  $R$ , se tiene

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{net}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r>R} \rho dV \quad (1.1)$$

Sabemos que sobre la superficie de la esfera el campo eléctrico es paralelo a la diferencial de superficie, además sabemos que sobre cualquier punto de la superficie Gaussiana, el módulo del campo eléctrico vale lo mismo:  $E$ , por lo tanto lo podemos sacar de la integral y obtenemos:

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \int_0^R \rho dV + \int_R^{r>R} \rho dV \right) \quad (1.2)$$

Pero la carga existe sólo hasta  $r = R$ , con densidad  $\rho(r) = \frac{\beta}{r^2}$ ,  $r \leq R$ , por lo tanto, la segunda integral vale cero, porque  $\rho = 0$ ,  $r > R$ . Usando la diferencial de volumen de la esfera  $dV_e = 4\pi r^2 dr$ , escribimos,

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \frac{\beta}{r^2} 4\pi r^2 dr \quad (1.3)$$

Integrando

$$Er^2 = \frac{\beta}{\epsilon_0} R \quad (1.4)$$

Finalmente. El campo fuera de la esfera es justo el campo creado por una carga puntual de carga igual a la carga de la esfera:

$$E = \frac{\beta R}{\epsilon_0 r^2} \quad (1.5)$$

Este es el campo que actúa sobre la línea de carga que está sobre el eje radial.

La fuerza eléctrica que actúa sobre un diferencial de carga  $dq'$  de la línea de carga viene dada por

$$dF = Edq' \quad (1.6)$$

donde,  $dq' = \lambda dr = (\alpha r) dr$ . Reemplazando esta expresión y el campo eléctrico obtenido en (1.5) en la relación (1.6), se tiene

$$dF = Edq' = \left( \frac{\beta R}{\epsilon_0 r^2} \right) (\alpha r) dr \quad (1.7)$$

Integrando se tiene

$$F = \int dF = \int Edq' = \int \left( \frac{\beta R}{\epsilon_0 r^2} \right) (\alpha r) dr \quad (1.8)$$

$$F = \left( \frac{\alpha \beta R}{\epsilon_0} \right) \int_b^{b+L} \frac{dr}{r} \quad (1.9)$$

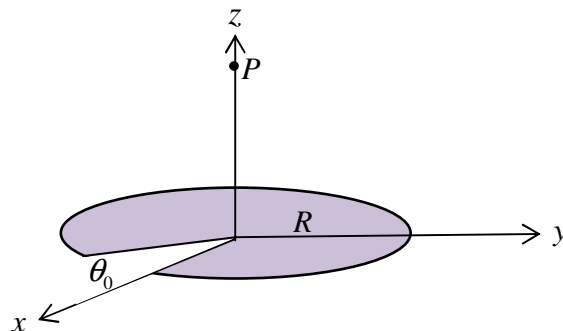
Finalmente, la fuerza neta sobre la línea de carga vale

$$F = \left( \frac{\alpha \beta R}{\epsilon_0} \right) \ln \left( \frac{b+L}{b} \right) \quad (1.10)$$

2.- Hallar el potencial electrostático  $V(\vec{r})$  en el punto  $P$ , a una distancia  $z$  sobre el eje de la lámina circular de radio  $R$ , a la cual le falta un sector circular que suscribe un ángulo

$\theta_0 = \frac{\pi}{6}$  tal como se indica en la figura. La lámina tiene una densidad superficial de carga

$$\sigma_0 = \frac{\beta}{r}.$$



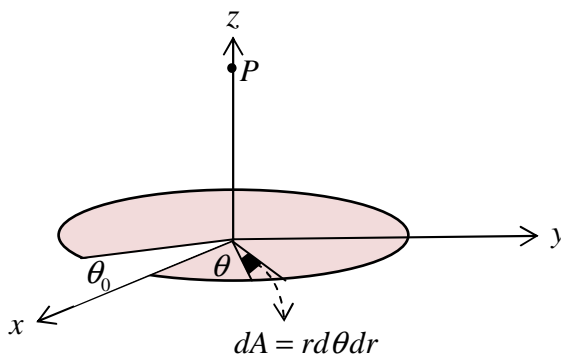
### Solución.

El potencial electrostático  $V(\vec{r})$  viene dado por

$$\text{Equation Section (Next)} V(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.1)$$

El diferencial de carga  $dq'$  ubicado en el primer cuadrante de la lámina mostrada en la figura, se encuentra a una distancia variable  $r$  del origen y hace un ángulo  $\theta$  variable con el eje  $x$ . Por lo tanto, las coordenadas  $(x, y)$  del diferencial de carga  $dq'$ , vienen dadas por

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta \quad (2.2)$$



El diferencial de carga  $dq'$  viene dado por

$$dq' = \sigma dA = \sigma(r d\theta dr) \quad (2.3)$$

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

Dado que ya tenemos el origen del sistema de referencia en el centro de la lámina, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por

$$\vec{r} = z\hat{k}; \quad \vec{r}' = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} \quad (2.4)$$

Restando y calculando el módulo, se tiene,

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= -r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z\hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + z^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Luego el potencial  $V(\vec{r})$  viene dado por

$$V(\vec{r}) = \int_V \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_{\theta=0}^{\theta=(2\pi-\theta_0)} \int_{r=0}^{r=R} \frac{k \sigma r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (2.6)$$

Dado que la densidad superficial de carga  $\sigma = \frac{\beta}{r}$  depende sólo de la variable  $r$ , y como las coordenadas  $r$  y  $\theta$  son independientes, las integrales se calculan de forma independiente,

$$V(\vec{r}) = \int_{\theta=0}^{\theta=(2\pi-\theta_0)} d\theta \int_{r=0}^{r=R} \frac{k \sigma r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (2.7)$$

$$V(\vec{r}) = (2\pi - \theta_0) k \int_{r=0}^{r=R} \frac{\beta r dr}{r \sqrt{r^2 + z^2}} \quad (2.8)$$

$$V(\vec{r}) = (2\pi - \theta_0) k \beta \int_{r=0}^{r=R} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (2.9)$$

$$V(\vec{r}) = (2\pi - \theta_0) k \beta \ln \left[ 2\sqrt{r^2 + z^2} - 2z \right] \Big|_{r=0}^{r=R} \quad (2.10)$$

Finalmente, el potencial creado por la lámina vale

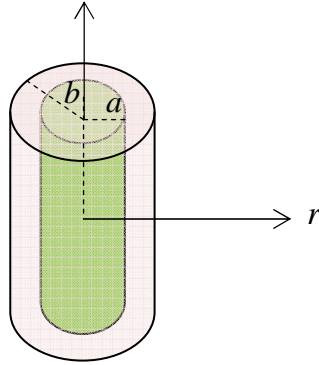
$$V(\vec{r}) = (2\pi - \theta_0) k \beta \ln \left( \frac{\sqrt{R^2 + z^2} - R}{|z|} \right) \quad (2.11)$$

3.- Calcular el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  y el potencial electrostático  $V(\vec{r})$  en función de la distancia radial  $r$ , creados por un cilindro “muy largo”, con densidad volumétrica de carga

$$\rho(r) \text{ dada por } \rho(r) = \begin{cases} \alpha r & \text{si } 0 < r < a \\ \frac{\beta}{r} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases}$$



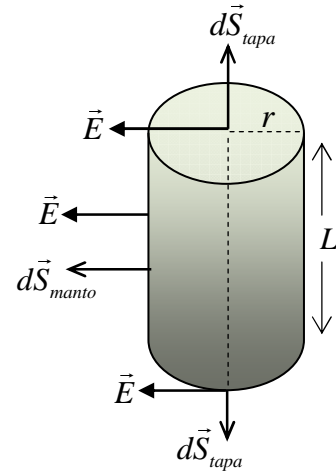
Para el cálculo del potencial no use el punto de referencia en  $r_{ref} = r \rightarrow \infty$ . En cambio debe usar como punto de referencia un valor arbitrario fuera del cilindro de valor  $r_{ref} = r_0$ .



### Solución.

Cálculo del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ .

Primero calcularemos el campo eléctrico en cada región partiendo desde las regiones interiores a las exteriores. Dado que el cilindro es muy largo, podemos usar ley de Gauss, es decir, emplearemos superficies Gaussianas cilíndricas de radio  $r$  y largo  $L$ . La figura muestra la relación entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y las diferenciales de superficie en las tapas y en el manto cilíndrico de la Gaussiana.



Recordemos que la superficie del manto cilíndrico vale  $S_{manto} = 2\pi rL$  y que la diferencial de volumen del cilindro vale  $dV_c = 2\pi Lrdr$ . La ley de Gauss para el cilindro queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{tapa1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{tapa2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{manto} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{manto} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

En las tapas del cilindro Gaussiano, el campo eléctrico y la diferencial de superficie son perpendiculares, y el producto punto se anula  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{tapas} = E dS_{tapas} \cos 90^\circ = 0$ , luego no hay contribución de las tapas a la integral. Por lo tanto, sólo tenemos que calcular de la integral sobre el manto cilíndrico, esto es,

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

$$\int_{\text{manto}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{manto}} = \frac{q_{\text{neto}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r) dV \quad (2.13)$$

En el manto, el campo eléctrico y la diferencial de superficie son paralelos, luego  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{manto}} = E dS_{\text{manto}}$ . Por otra parte, el módulo del campo eléctrico  $E$  vale lo mismo en todos los puntos del manto cilíndrico, por lo tanto,  $E$  se puede sacar de la integral y se obtiene

$$E S_{\text{manto}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r) dV \quad (2.14)$$

donde el límite superior indica el radio de la Gaussiana cilíndrica. Usando el valor  $S_{\text{manto}} = 2\pi rL$  y el valor  $dV_c = 2\pi Lrdr$ , tenemos,

$$E 2\pi rL = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r) 2\pi Lrdr \quad (2.15)$$

Simplificando por  $2\pi L$ , se obtiene

$$Er = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r) r dr \quad (2.16)$$

Esta es la expresión que emplearemos para calcular el campo en todas las regiones.

Región 1: para  $r$  en la región  $0 < r < a$ . En esta región la densidad vale  $\rho(r) = (\alpha r)$ .

Usando la relación (2.16) se tiene

$$E_1 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r (\alpha r) r dr \quad (2.17)$$

$$E_1 r = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \frac{r^3}{3} \quad (2.18)$$

Simplificando, se obtiene el campo en la región  $0 < r < a$

$$\vec{E}_1 = \frac{\alpha r^2}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad (2.19)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario radial, perpendicular al eje del cilindro.

Región 2: para  $r$  en la región  $a < r < b$ . En esta región la densidad vale  $\rho(r) = \left(\frac{\beta}{r}\right)$ .

Usando relación (2.16), se tiene

$$E_2 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{a < r < b} \rho(r) r dr = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a \rho(r) r dr + \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^{a < r < b} \rho(r) r dr \quad (2.20)$$

Reemplazando los valores de la densidad de carga en cada región, escribimos

$$E_2 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a (\alpha r) r dr + \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^{a < r < b} \left( \frac{\beta}{r} \right) r dr \quad (2.21)$$

Simplificando e integrando

$$E_2 r = \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} + \frac{\beta}{\epsilon_0} (a - r) \quad (2.22)$$

Finalmente, el campo eléctrico en la región 2 vale:

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(r - a)) \hat{r} \quad (2.23)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario radial, perpendicular al eje del cilindro.

Región 3: para  $r$  en la región  $r > b$ . En esta región la densidad vale  $\rho(r) = 0$ .

Usando relación (2.16), se tiene

$$E_3 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r > b} \rho(r) r dr = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \int_0^a \rho(r) r dr + \int_a^b \rho(r) r dr + \int_b^{r > b} \rho(r) r dr \right) \quad (2.24)$$

Aplicando los valores de las densidades de carga, se obtiene

$$E_3 r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a (\alpha r) r dr + \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^b \left( \frac{\beta}{r} \right) r dr \quad (2.25)$$

$$E_3 r = \left( \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} + \frac{\beta}{\epsilon_0} (b - a) \right) \quad (2.26)$$

El campo eléctrico en la región 3 viene dado por

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(b - a)) \hat{r} \quad (2.27)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario radial, perpendicular al eje del cilindro.

Cálculo del potencial electrostático  $V(\vec{r})$ .

El potencial electrostático en un punto viene dado por

$$V(\vec{r}) = \int_{r_0}^r -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.28)$$

donde el potencial en el punto  $r_0$  vale cero, es decir,  $V(r_0) = 0$ .

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

Calcularemos el potencial viniendo desde la región 3 hasta la región interior 1.

Región 3: para  $r$  en la región  $r > b$ .

$$V(r > b) = \int_{r_0}^{r > b} -\vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = - \int_{r_0}^{r > b} E_3 dr \quad (2.29)$$

Reemplazando  $E_3$ , se tiene,

$$V(r > b) = - \int_{r_0}^{r > b} \frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0 r} dr \quad (2.30)$$

$$V(r > b) = - \frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0} \int_{r_0}^{r > b} \frac{dr}{r} \quad (2.31)$$

Finalmente, el potencial  $V(r > b)$  en la región 3 exterior al cilindro viene dado por,

$$V(r > b) = - \frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (2.32)$$

Justo en el punto  $r = b$ , el potencial vale

$$V_b = V(r = b) = - \frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r_0}\right) \quad (2.33)$$

Región 2: para  $r$  en la región  $a < r < b$ .

$$V(a < r < b) = \int_{r_0}^{a < r < b} -\vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_0}^b E_3 dr - \int_b^{a < r < b} E_2 dr \quad (2.34)$$

La primera integral corresponde al potencial dada por relación (2.32), pero evaluado en  $r = b$ , es decir, es justo  $V_b$ . El campo  $E_2$  viene dado por relación (2.23)

$$V(a < r < b) = V_b - \int_b^{a < r < b} \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(r-a)) dr \quad (2.35)$$

Calculemos la integral restante

$$I = \int_b^{a < r < b} \frac{1}{3\epsilon_0 r} (\alpha a^3 + 3\beta(r-a)) dr = \int_b^{a < r < b} \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0 r} dr + \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_b^{a < r < b} \frac{(r-a) dr}{r} \quad (2.36)$$

$$I = \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} \int_b^{a < r < b} \frac{dr}{r} + \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_b^{a < r < b} dr - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \int_b^{a < r < b} \frac{dr}{r} \quad (2.37)$$

$$I = \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{\beta}{\epsilon_0} (r-b) - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \quad (2.38)$$

$$I = \left( \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \right) \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{\beta}{\epsilon_0}(r-b) \quad (2.39)$$

Reemplazando esta integral en la relación (2.36), se tiene

$$V(a < r < b) = V_b - \left( \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \right) \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{\beta}{\epsilon_0}(r-b) \quad (2.40)$$

Si hacemos  $r = b$  se obtiene el potencial  $V_b$  que vale lo mismo que usando la relación (2.33), es decir, el potencial es continuo en el punto  $r = b$ . Si hacemos  $r = a$  en la relación (2.40), se obtiene el potencial  $V(r = a) = V_a$

$$V_a = V(r = a) = -\frac{(\alpha a^3 + 3\beta(b-a))}{3\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r_0}\right) - \left( \frac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} - \frac{a\beta}{\epsilon_0} \right) \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{\beta}{\epsilon_0}(a-b) \quad (2.41)$$

Región 1: para  $r$  en la región  $0 < r < a$ .

$$V(0 < r < a) = \int_{r_0}^{0 < r < a} -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{r_0}^b E_3 dr - \int_b^a E_2 dr - \int_a^{0 < r < a} E_1 dr \quad (2.42)$$

Los dos primeros términos del lado derecho corresponden justo al valor del potencial  $V_a$  en el punto  $r = a$ . Por simplicidad de notación lo dejaremos así expresado. Usando  $E_1$  dado por la relación (2.19), la relación (2.42) queda

$$V(0 < r < a) = V_a - \frac{\alpha}{3\epsilon_0} \int_a^{0 < r < a} r^2 dr \quad (2.43)$$

$$V(0 < r < a) = V_a - \frac{\alpha(r^3 - a^3)}{9\epsilon_0} \quad (2.44)$$

Si  $r = a$  se obtiene  $V_a$ , lo cual prueba que el potencial es continuo en el punto  $r = a$ .

Si  $r = 0$  se obtiene el potencial en el origen del sistema de cilindros  $V_0 = V_a + \frac{\alpha a^3}{9\epsilon_0}$ .

## Solucionario

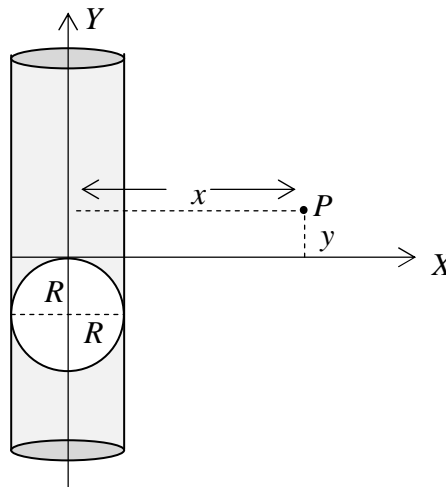
## Primera Prueba de Cátedra

## Electromagnetismo FI-604

Semestre de Otoño 2012

1. Se tiene una distribución de carga cilíndrica muy larga, de radio  $R$ , con densidad volumétrica de carga  $\rho = cte$ . En la posición que se muestra en la figura existe un agujero esférico de radio  $R$ . Calcule:

- el vector campo eléctrico resultante  $\vec{E}_R = E_{R,x}\hat{i} + E_{R,y}\hat{j}$  en el punto  $P(x, y)$ .
- La diferencia de potencial electrostático entre el punto  $P$  y la superficie del cilindro.

**Solución.**

Usaremos el principio de superposición de los campos creados por un cilindro muy largo de radio  $R$ , lleno de carga positiva, y una esfera de radio  $R$  llena de carga, pero con signo negativo.

Campo eléctrico creado por el cilindro:

Para calcular el campo eléctrico en el punto  $P$ , usaremos una Gaussiana cilíndrica de radio  $x$  que pasa justo por el punto  $P$ . Aplicando ley de Gauss, se tiene:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV_{cil} \quad (45)$$

Dado que  $\rho = cte$ , y que  $dV_{cil} = 2\pi L r dr$ , y dado además que  $\vec{E}$  es paralelo a  $d\vec{S}_{manto}$  y a que  $|\vec{E}| = cte$  sobre el manto cilíndrico, se tiene

$$E \int_0^x dS_{manto} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \rho 2\pi L r dr \quad (46)$$

La integral sobre el volumen se hace sólo hasta  $r = R$ , ya que la carga sólo existe hasta ese punto. Además, sabemos que  $dS_{manto} = 2\pi L dr$ , luego,

$$E \int_0^x 2\pi L dr = \frac{\rho 2\pi L}{\epsilon_0} \int_0^R r dr \quad (47)$$

Finalmente, el módulo del campo eléctrico producido por el cilindro lleno viene dado por:

$$E_{cil} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} \quad (48)$$

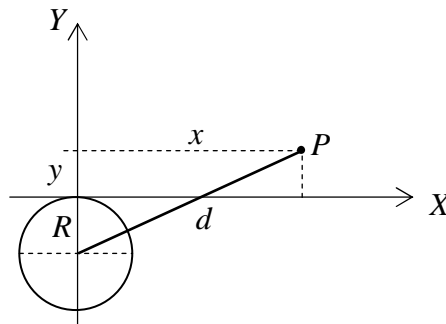
Dado que la carga del cilindro es positiva, el vector  $\vec{E}_{cil}$  justo en el punto  $P$ , viene dado por

$$\vec{E}_{cil} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} \hat{i} \quad (49)$$

Campo eléctrico creado por la esfera con carga negativa

El campo eléctrico fuera de una esfera es igual al campo creado por una carga puntual igual a la carga de la esfera  $q_{esf}$ , es decir,

$$E_{esf} = \frac{q_{esf}}{4\pi\epsilon_0 d^2} \quad (50)$$



En este caso  $d$  es la distancia del centro de la esfera al punto  $P$ , y viene dada por.

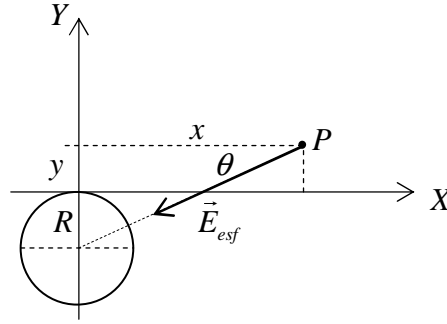
### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

$$d = \sqrt{x^2 + (y + R)^2} \quad (51)$$

La carga de la esfera viene dada por  $q_{esf} = \rho V_{esf} = \rho \frac{4\pi R^3}{3}$ . Por lo tanto, el módulo del campo eléctrico creado por la esfera vale:

$$E_{esf} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 d^2} \quad (52)$$

Dado que el agujero esférico se puede considerar como una esfera llena con carga negativa, el vector campo eléctrico de la esfera  $\vec{E}_{esf}$  apunta hacia el centro de la esfera a lo largo de la línea de largo  $d$ .



El vector  $\vec{E}_{esf}$  hace un ángulo  $\theta$  hacia abajo del eje horizontal, tal como se muestra en la figura. Este ángulo es conocido

$$\cos \theta = \frac{x}{d}; \quad \sin \theta = \frac{(y + R)}{d} \quad (53)$$

Usando  $\theta$ , el vector  $\vec{E}_{esf}$ , se puede escribir como

$$\vec{E}_{esf} = -E_{esf} \cos \theta \hat{i} - E_{esf} \sin \theta \hat{j} \quad (54)$$

Usando (53), se tiene

$$\vec{E}_{esf} = -\frac{E_{esf}}{d} (x \hat{i} + (y + R) \hat{j}) \quad (55)$$

Reemplazando el modulo  $E_{esf}$  dado por (52), se tiene

$$\vec{E}_{esf} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 d^3} (x \hat{i} + (y + R) \hat{j}) \quad (56)$$

Usando el valor de  $d$  dado por (51), tiene finalmente el vector campo eléctrico de la esfera en el punto  $P$ :



$$\vec{E}_{esf} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}} \left(x\hat{i} + (y+R)\hat{j}\right) \quad (57)$$

El vector resultante de la superposición de los campos creados por el cilindro y el agujero esférico queda de la siguiente forma:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_{cil} + \vec{E}_{esf} \quad (58)$$

Reemplazando los campos obtenidos en (49) y (58), se tiene el resultado final

$$\vec{E}_R = \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x}\hat{i}\right) + \left(-\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}} \left(x\hat{i} + (y+R)\hat{j}\right)\right) \quad (59)$$

Reordenando, se obtiene el vector campo eléctrico resultante:

$$\vec{E}_R = \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} - \frac{\rho R^3 x}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}}\right)\hat{i} - \frac{\rho R^3 (y+R)}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}}\hat{j} \quad (60)$$

b) Cálculo de la diferencia de potencial entre el punto  $P$  y la superficie del cilindro

La diferencia de potencial viene dada por  $\Delta V = -\int_x^R \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Como la diferencia de potencial

electrostática no depende de la trayectoria seguida entre los puntos, elegimos viajar desde  $P$  hasta  $R$ , el borde del cilindro, a lo largo del eje  $X$ , usando una trayectoria hacia el origen, es decir, hacemos  $d\vec{l} = -dx\hat{i}$ . Entonces el producto punto entre  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  queda:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot (-dx\hat{i}) = -E_x dx \quad (61)$$

donde  $E_x$  es la componente  $x$  del campo eléctrico resultante dada por (60), luego,

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} - \frac{\rho R^3 x}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}}\right) dx \quad (62)$$

Entonces la diferencia de potencial queda

$$\Delta V = \int_x^R \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 x} - \frac{\rho R^3 x}{3\epsilon_0 \left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}}\right) dx \quad (63)$$

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

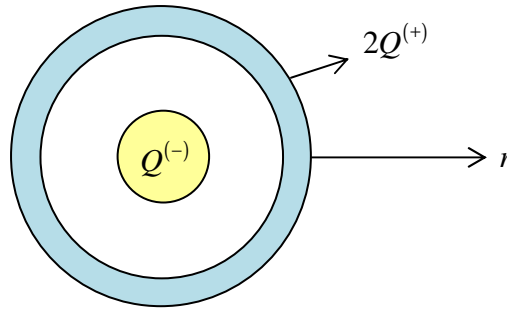
$$\Delta V = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_x^R \frac{1}{x} dx - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_x^R \frac{x}{\left(x^2 + (y+R)^2\right)^{3/2}} dx \quad (64)$$

Integrando, obtenemos la diferencia de potencial pedida:

$$\Delta V = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{x}\right) + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + (y+R)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+R)^2}} \right) \quad (65)$$

Equation Chapter (Next) Section 1

2.- Sobre las regiones metálicas esféricas mostradas en la figura, se distribuyen las cargas que se indican. La esfera metálica interior de radio  $a$  es maciza y tiene una carga  $Q^{(-)}$ . El cascarón metálico tiene radio interior  $b$  y radio exterior  $c$ , y tiene una carga  $2Q^{(+)}$  en su superficie. Entre los metales no existe carga.



- Hallar, como función de la distancia radial  $r$ , el campo eléctrico en todas las regiones.
- Calcule la diferencia de potencial  $\Delta V_{ab} = (V_b - V_a)$ , entre la esfera interior y el cascarón metálico exterior.

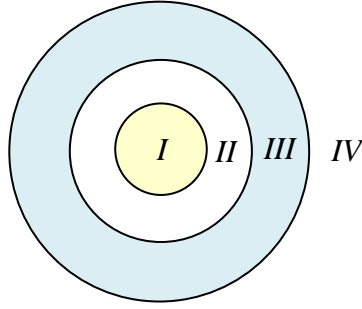
#### **Solución.**

- Hallar, como función de la distancia radial  $r$ , el campo eléctrico en todas las regiones.

Calcularemos el campo eléctrico en cada región usando ley e Gauss. Sin embargo, sabemos que el campo eléctrico vale cero dentro de los metales en el caso estático. Por lo tanto calcularemos sólo los campos en las regiones *II* y *IV*.

Las regiones vienen definidas de la siguiente forma:

$$I : 0 < r < a; \quad II : a < r < b; \quad III : b < r < c; \quad IV : r > c \quad (1)$$



Región  $I : 0 < r < a$  : dentro del metal.

Dentro un metal el campo siempre vale cero. En este caso no existe carga al interior de la superficie metálica, por eso no existe campo eléctrico, luego,

$$E_I = 0 \quad (2)$$

Región  $II : a < r < b$  : entre los metales.

Usamos una Gaussiana esférica de radio  $a < r < b$  que encierra a la carga negativa  $Q^{(-)}$ . La ley de Gauss queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{-Q}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Dado que la carga de la esfera metálica interior es negativa, el campo eléctrico en esta región apunta radialmente hacia el centro de la esfera. Sin embargo, la diferencial de superficie sobre la esfera Gaussiana apunta radialmente hacia afuera, luego, el producto punto resulta negativo, es decir,  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = -EdS$ . Reemplazando en (3), se tiene

$$-\oint EdS = \frac{-Q}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\oint EdS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Sobre la Gaussiana, el módulo del campo eléctrico es constante, luego no depende de la superficie y se puede sacar del signo integral.

$$ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6)$$

La superficie  $S$  de la esfera de radio  $a < r < b$ , vale  $S = 4\pi r^2$ . Reemplazando en (6), se tiene el campo eléctrico en la región  $II$  :

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7)$$

Vectorialmente este campo apunta radialmente hacia el centro, luego

$$\vec{E}_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \quad (8)$$

donde  $\hat{e}_r$  es el vector unitario que apunta radialmente hacia fuera.

Región *III* :  $b < r < c$  : dentro del cascarón metálico.

Dentro un metal el campo siempre vale cero. En este caso, la carga neta al interior de la superficie Gaussiana es la suma de la carga de la esfera interior, más la carga inducida en el cascarón metálico, la cual es de igual magnitud, pero de signo opuesto que la carga de la esfera interior. Por lo tanto, la carga neta encerrada en la Gaussiana es cero. En consecuencia, el campo eléctrico se anula al interior del cascarón metálico, luego,

$$E_3 = 0 \quad (9)$$

Región *IV* :  $r > c$  : fuera de la distribución de cargas.

Usamos una Gaussiana esférica de radio  $r > c$  que encierra a la carga negativa  $Q^{(-)}$  más la carga positiva  $2Q^{(+)}$ . En consecuencia, la carga neta encerrada vale  $q_{neta} = -Q + 2Q = Q$ .

La ley de Gauss queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{-Q + 2Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (10)$$

Dado que la carga neta es positiva, el campo eléctrico en esta región apunta radialmente hacia fuera, el módulo del campo eléctrico en esta región *IV*, vale,

$$E_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (11)$$

Vectorialmente este campo apunta radialmente hacia afuera de las esferas, luego

$$\vec{E}_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \quad (12)$$

donde  $\hat{e}_r$  es el vector unitario que apunta radialmente hacia fuera.

b) Calcule la diferencia de potencial entre la esfera interior y el cascarón metálico exterior. La diferencia de potencial entre la esfera interior de radio  $a$  y el cascarón exterior de radio  $b$ , viene dada por

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = -\int_a^b \vec{E}_2 \cdot (\hat{e}_r dr) \quad (13)$$

Si viajamos a lo largo de una línea radial desde  $a$  hasta  $b$ , escribimos  $d\vec{l} = d\vec{r} = \hat{e}_r dr$ :

Reemplazando el valor del campo eléctrico  $\vec{E}_2$  en la región II, se tiene:

$$\Delta V = -\int_a^b \left( -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \right) \cdot (\hat{e}_r dr) \quad (14)$$

$$\Delta V = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \int_a^b \frac{dr}{r^2} \quad (15)$$

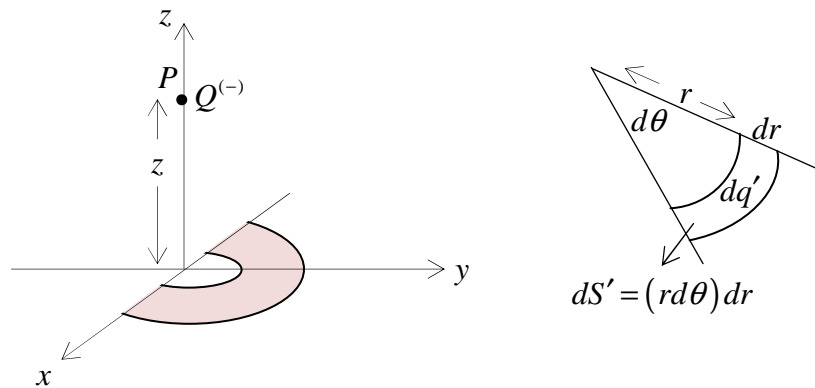
$$\Delta V = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{-1}{r} \right)_a^b \quad (16)$$

Finalmente, la diferencia de potencial pedida vale:

$$\Delta V = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (17)$$

Equation Chapter (Next) Section 1

2. a) Calcule la fuerza sobre una carga negativa  $Q^{(-)}$  ubicada en el punto  $P$ , ejercida por una corona semicircular de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , localizada tal como se muestra en la figura. La densidad superficial de carga de la lámina vale  $\sigma = \left( \frac{\beta}{r} \right)$ . La carga  $Q^{(-)}$  está localizada en el punto de coordenadas  $(0,0,z)$ .
- b) Calcule el potencial electrostático creado por la corona semicircular en el punto  $P$ .



### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

#### **Solución.**

a) Cálculo de la fuerza sobre  $Q^{(-)}$ .

La carga diferencial  $dq'$  viene dada por  $dq' = \sigma dS' = \sigma(rdrd\theta)$ . Pero  $\sigma = \left(\frac{\beta}{r}\right)$ , por lo tanto,

$$dq' = \left(\frac{\beta}{r}\right)(rdrd\theta) = \beta drd\theta \quad (1)$$

Por otra parte, de acuerdo a los ejes coordenados, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por:

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad (2)$$

$$\vec{r}' = (r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}) \quad (3)$$

Luego,

$$(\vec{r} - \vec{r}') = (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}) \quad (4)$$

y su módulo vale

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 + z^2} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + z^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Entonces, el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int \frac{k dq' (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k})}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6)$$

Reemplazando  $dq'$  dada por (1), se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\beta \int \frac{drd\theta (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k})}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (7)$$

Separando integrales, tenemos

$$E_x = -k\beta \int \frac{rdr \cos \theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (8)$$

$$E_y = -k\beta \int \frac{rdr \sin \theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (9)$$

$$E_z = kz\beta \int \frac{drd\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (10)$$

Las coordenadas  $r$  y  $\theta$  varían de manera independiente, por lo tanto podemos separar las integrales. La corona se forma cuando  $\theta$  varía entre  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , y cuando  $r$  varía entre  $r = a$  y  $r = b$ . En consecuencia, escribimos,

$$E_x = -k\beta \int_a^b \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^\pi \cos \theta d\theta \quad (11)$$

$$E_y = -k\beta \int_a^b \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \quad (12)$$

$$E_z = kz\beta \int_a^b \frac{dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\theta \quad (13)$$

Haciendo primero las integrales sobre  $\theta$ , se obtiene

$$\int_0^\pi \cos \theta d\theta = \sin \theta \Big|_0^\pi = 0; \quad \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^\pi = 2; \quad \int_0^\pi d\theta = \theta = \pi \quad (14)$$

Usando estos resultados, las componentes del campo eléctrico dadas por (11), (12) y (13), quedan

$$E_x = 0 \quad (15)$$

Por simetría sabíamos que la componente  $x$  del campo eléctrico  $E_x$  debía anularse,  $E_x = 0$ .

$$E_y = -2k\beta \int_a^b \frac{rdr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (16)$$

$$E_z = \pi kz\beta \int_a^b \frac{dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (17)$$

Ahora hacemos las integrales sobre  $r$  y se obtiene:

$$E_y = (-2k\beta) \left( -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)_a^b = (2k\beta) \left( \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (18)$$

$$E_z = \left( \frac{\pi kz\beta}{z^2} \right) \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)_a^b = \left( \frac{\pi k\beta}{z} \right) \left( \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (19)$$

En consecuencia, el vector campo eléctrico resultante viene dado por

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

$$\vec{E}(z) = (2k\beta) \left( \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{j} + \left( \frac{\pi k \beta}{z} \right) \left( \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k} \quad (20)$$

Entonces, la fuerza sobre la carga  $Q^{(-)}$  viene dada por:

$$\vec{F} = -Q\vec{E}(z) \quad (21)$$

El signo menos aparece porque la carga es negativa, lo cual implica que la fuerza es de atracción. La fuerza vale:

$$\vec{F} = -Q(2k\beta) \left( \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{j} - Q \left( \frac{\pi k \beta}{z} \right) \left( \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k} \quad (22)$$

b) Calcule el potencial electrostático creado por la corona semicircular en el punto  $P$ .

El potencial electrostático viene dado por la expresión

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (23)$$

donde  $dq'$  y  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  vienen dados por las expresiones obtenidas en el cálculo del campo eléctrico, relaciones (1) y (5). Por lo tanto, (23) queda

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k \beta dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (24)$$

Integrando primero sobre  $\theta$  desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$ , tenemos

$$V(\vec{r}) = \pi k \beta \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (25)$$

La integral sobre  $r$  vale

$$V(\vec{r}) = \pi k \beta \ln \left( r + \sqrt{r^2 + z^2} \right) \Big|_a^b \quad (26)$$

Finalmente, la diferencia de potencial pedido vale,

$$V(\vec{r}) = \pi k \beta = \pi k \beta \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{a + \sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (27)$$



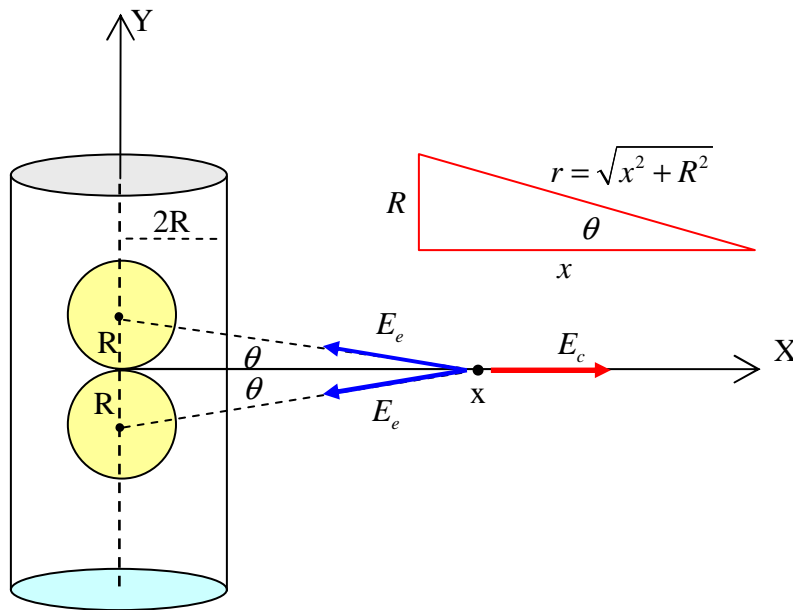
Solucionario

Primera Prueba de Electromagnetismo

Ingeniería Plan Común

Semestre de Otoño 2013

- 1.- Un cilindro muy largo de radio  $2R$  tiene una densidad volumétrica de carga  $\rho_0$  distribuida homogéneamente. Sobre su eje existen dos agujeros esféricos, cada uno de radio  $R$ .
- a) Hallar el campo eléctrico  $E(x)$  sobre el eje  $X$  para valores de  $x > 2R$ .
- b) Hallar la diferencia de potencial electrostático  $\Delta V = V(2R) - V(5R)$  entre los puntos  $x = 5R$  y  $x = 2R$



**Solución:**

1a) Hallar el campo eléctrico  $E(x)$  sobre el eje  $X$  para valores de  $x > 2R$ .

Usando el principio de superposición, el campo resultante viene dado por la siguiente expresión:

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

$\vec{E} = (E_c - 2E_e \cos \theta) \hat{i}$ , donde  $E_c$  es el módulo del campo del cilindro de radio  $2R$  y donde  $E_e$  es el módulo del campo creado por cada una de las esferas de radio  $R$ . La componente  $E_y$  del campo se anula por simetría.

Campo de un cilindro muy largo. Se usa una Gaussiana de radio  $r > 2R$  y altura  $h$ :

$$\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_c 2\pi r h = \frac{\rho_0 V_{cilindro}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_c 2\pi r h = \frac{\rho_0 \pi (2R)^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_c = \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0 r}$$

En el punto  $x$  se cumple que  $r = x$ , luego el campo del cilindro vale:  $E_c(x) = \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0 x}$ .

Vectorialmente escribimos:  $\boxed{\vec{E}_c(x) = \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0 x} \hat{i}}$

Campo de una esfera. Se usa Gaussiana de radio  $r > R$ :

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_e 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 V_{esfera}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_e 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 4\pi R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E_e = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

En el punto  $x$  se cumple que  $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ , luego el módulo del campo eléctrico creado por la esfera en el punto  $x$  viene dado por:

$$E_e = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + R^2)}.$$

Vectorialmente escribimos para el campo creado por la esfera de arriba (up):

$$\boxed{\vec{E}_e^{up}(x) = E_e (-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + R^2)} (-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})}$$

Vectorialmente escribimos para el campo creado por la esfera de abajo (down):

$$\boxed{\vec{E}_e^{down}(x) = E_e (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + R^2)} (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})}$$

Los vectores que representan a los campos creados por cada una de las esferas apuntan en dirección a cada esfera, porque al aplicar el principio de superposición consideramos que su densidad  $\rho_0$  es negativa.

El campo resultante en el punto  $x$  se obtiene sumando vectorialmente todos los campos, es decir, superponiendo todos los campos:

$$\vec{E} = \vec{E}_c(x) + \vec{E}_e^{up}(x) + \vec{E}_e^{down}(x)$$

Con lo cual se obtiene:  $\vec{E} = (E_c - 2E_e \cos \theta) \hat{i}$ , explícitamente se tiene:

$$\vec{E} = \left( \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0 x} - \frac{2\rho_0 R^3 \cos \theta}{3\epsilon_0 (x^2 + R^2)} \right) \hat{i}$$

Las componentes a lo largo del eje Y se anulan entre sí. El campo resultante sólo tiene componente a lo largo del eje X. De la figura se ve claramente que  $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$ ,

por lo tanto, el campo resultante del cilindro de carga con dos agujeros esféricos queda:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{xR}{3(x^2 + R^2)^{3/2}} \right) \hat{i}}$$

1b) Hallar la diferencia de potencial electrostático  $\Delta V = V(2R) - V(5R)$  entre los puntos  $x = 5R$  y  $x = 2R$

La diferencia de potencial se obtiene a través de la expresión:  $V(b) - V(a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

En este caso nos movemos a lo largo del eje  $x$ , por lo tanto, después de realizar el producto punto y cambiar la diferencial, escribimos:

$$\Delta V = V(2R) - V(5R) = - \int_{5R}^{2R} E(x) dx$$

Usando el campo obtenido anteriormente, nos queda:

$$\Delta V = V(2R) - V(5R) = - \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \int_{5R}^{2R} \left( \frac{1}{x} - \frac{xR}{3(x^2 + R^2)^{3/2}} \right) dx$$

integrando

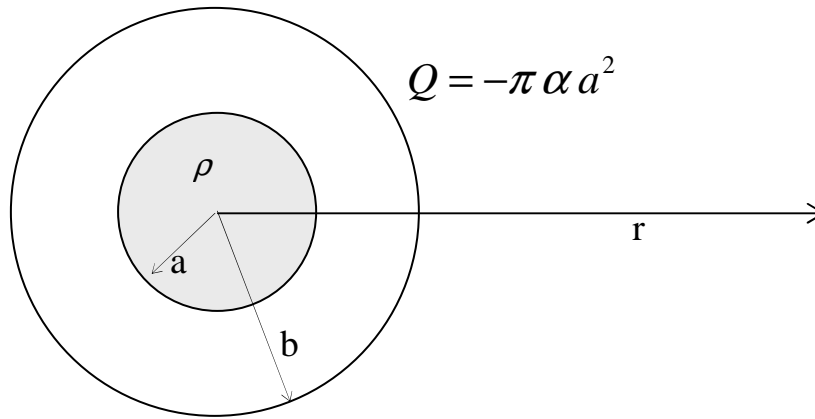
$$\Delta V = V(2R) - V(5R) = - \frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left[ \ln x + \frac{R}{3\sqrt{x^2 + R^2}} \right]_{5R}^{2R}$$

Finalmente la diferencia de potencial queda:

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

$$\Delta V = V(2R) - V(5R) = -\frac{2\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left[ \ln \frac{2}{5} + \frac{1}{3\sqrt{5}} - \frac{1}{3\sqrt{26}} \right]$$

2.- Hallar el campo eléctrico  $E(r)$  y el potencial electrostático  $V(r)$  en función de la distancia radial  $r$ , en cada una de las regiones, para la configuración formada por una esfera central de radio  $a$  con distribución de carga radialmente simétrica dada por  $\rho = \frac{\beta}{r}$  para  $0 < r \leq a$  con  $\beta = cte.$ , rodeada por un cascarón metálico entre  $r = a$  y  $r = b$  que lleva una carga  $Q = -\pi \alpha a^2$  en su superficie.



#### Solución:

2a) Cálculo del campo eléctrico

Se usará la ley de Gauss para calcular el campo en cada región:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$

Región I:  $0 < r \leq a$

Se usa una Gaussiana de radio  $r \leq a$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\int_0^{r \leq a} \rho(r) dV}{\epsilon_0}$$

Pero, la densidad volumétrica de carga depende de la distancia radial:  $\rho = \frac{\beta}{r}$  para  $0 < r \leq a$

con  $\beta = cte.$ , reemplazando en la integral y recordando que la diferencial de volumen de la esfera viene dada por  $dV = 4\pi r^2 dr$ , podemos escribir:

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r \leq a} \frac{\beta}{r} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\beta}{\epsilon_0} \int_0^{r \leq a} r dr = \frac{4\pi\beta r^2}{2\epsilon_0}$$

Simplificando se tiene finalmente  $E_I$  el campo eléctrico en la región I:

$$E_I = \frac{\beta}{2\epsilon_0}$$

Región II:  $a \leq r \leq b$

Se usa Gaussiana de radio  $a \leq r \leq b$ . En este caso sabemos que el campo eléctrico estático es cero en el interior de un conductor, por lo tanto:

$$E_{II} = 0$$

Es importante recordar que se produce inducción de cargas en el metal de modo que el campo en el interior es cero, es decir, de la ley de Gauss se infiere que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \Rightarrow 0 = q_{neta}, \text{ es decir, la carga neta encerrada en la Gaussiana debe ser cero,}$$

por lo que debe haber carga inducida  $Q_{ind}$  en la superficie interior del conductor, tal que la suma con la carga total interior  $q_{int}$  encerrada en la esfera de radio  $r = a$  debe ser cero:

$q_i + Q_{ind} = 0$ . Vemos así que la carga inducida tiene la misma magnitud que la carga total

$$\text{interior } q_{int} \text{ de la esfera de radio } r = a, \text{ a saber: } Q_{ind} = -q_i = -\int_0^a \frac{\beta}{r} 4\pi r^2 dr$$

Finalmente, la carga total  $q_{int}$  en la esfera interior de radio  $r = a$  vale

$$q_i = 2\pi\beta a^2$$

y la carga inducida en el metal vale:

$$Q_{ind} = -2\pi\beta a^2$$

Naturalmente que en la superficie exterior del metal aparece también la misma cantidad de carga inducida pero de signo opuesto, que modo tal que la suma de toda la carga inducida en el metal es cero.

Región III:  $b < r$

Se usa Gaussiana de radio  $b < r$ .

Debemos recordar que el sistema de esferas tiene dos tipos de cargas libres: la carga en la esfera interior recién calculada:  $q_i = 2\pi\beta a^2$  y la carga libre en la superficie exterior del

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

metal:  $q_e = -\pi\alpha a^2$  de modo que la carga total encerrada en la Gaussiana de  $b < r$  viene dada por

$$q_{\text{neta encerrada}} = q_i + q_e = 2\pi\beta a^2 - \pi\alpha a^2 = \pi a^2 (2\beta - \alpha).$$

Ahora aplicamos Gauss

$$E_{III} 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} = \frac{\pi a^2 (2\beta - \alpha)}{\epsilon_0}$$

Finalmente, el campo fuera de las esferas viene dado por:

$$E_{III} = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$$

#### 2b) Cálculo del potencial electrostático

Calcularemos el potencial como función de la distancia radial  $r$  usando la relación:

$$V(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Comenzaremos desde la región III hasta la región I

Región III:  $b < r$

En esta región el campo eléctrico vale  $E_{III} = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$ , por lo tanto, la integral queda

$$V_{III}(r) = -\int_{\infty}^{b < r} E_{III} dr = -\int_{\infty}^{b < r} \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} dr$$

Obteniéndose finalmente

$$V_{III}(r) = \frac{a^2 (2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r}$$

Región II:  $a \leq r \leq b$

En esta región la integral para calcular el potencial se debe separar en dos porque la integral atraviesa dos regiones distintas:

$$V_{III}(r) = -\int_{\infty}^{a < r < b} E dr = -\int_{\infty}^b E_{III} dr - \int_b^{a < r < b} E_{II} dr$$

Los campos en cada región son:  $E_{III} = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$  y  $E_{II} = 0$ . Reemplazando en la integral

anterior, tenemos

$$V_{II}(r) = -\int_{\infty}^b \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} dr - \int_b^{a < r < b} 0 dr = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b}$$

Finalmente:

$$\boxed{V_{II}(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b}}$$

Vemos así que el potencial en el interior del metal es constante, es decir, el conductor en estado estático siempre es un volumen equipotencial.

Región I:  $0 < r \leq a$

La integral del potencial se escribe

$$V_I(r) = -\int_{\infty}^{r < a} E dr = -\int_{\infty}^b E_{III} dr - \int_b^a E_{II} dr - \int_a^{r < a} E_I dr$$

Los campos en cada región son:  $E_{III} = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2}$ ,  $E_{II} = 0$  y  $E_I = \frac{\beta}{2\epsilon_0}$ , luego la integral

queda

$$V_I(r) = -\int_{\infty}^b E_{III} dr - \int_a^{r < a} E_I dr$$

Reemplazando los campos

$$V_I(r) = -\int_{\infty}^b \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^{r < a} \frac{\beta}{2\epsilon_0} dr$$

Integrando se tiene el potencial en la región I:

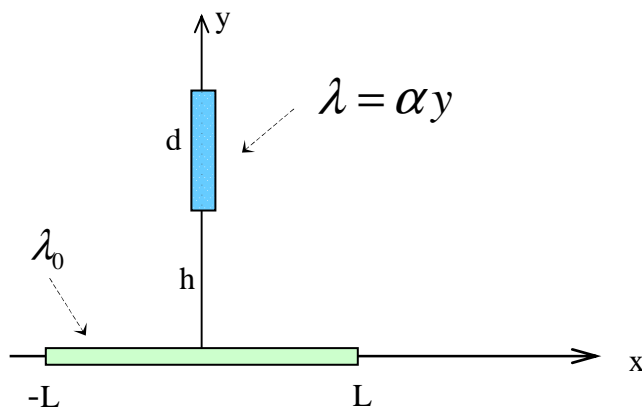
$$\boxed{V_I(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} - \frac{\beta}{2\epsilon_0}(r - a)}$$

En resumen, el potencial como función de  $r$  en cada región queda

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

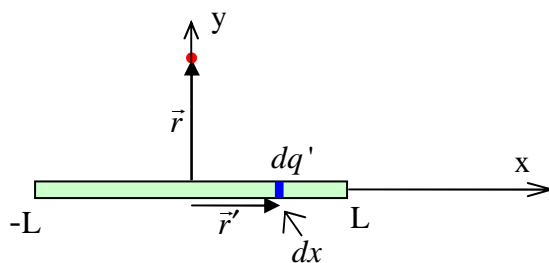
$$V(r) = \begin{cases} V_I(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} - \frac{\beta}{2\epsilon_0}(r - a) & 0 < r \leq a \quad \text{región I} \\ V_{II}(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 b} & a \leq r \leq b \quad \text{región II} \\ V_{III}(r) = \frac{a^2(2\beta - \alpha)}{4\epsilon_0 r} & b \leq r \quad \text{región III} \end{cases}$$

3.- Una varilla horizontal de largo  $2L$  tiene una densidad lineal de carga homogénea  $\lambda_0$ . Justo sobre su centro y a una altura  $h$  se encuentra una segunda varilla de largo  $d$  con densidad lineal de carga  $\lambda = \alpha y$ , con  $\alpha = \text{cte}$ . Calcule la fuerza resultante  $\vec{F}$  ejercida por la varilla horizontal sobre la varilla vertical.



#### Solución:

Primero calculamos el campo eléctrico generado por una varilla horizontal de largo  $2L$  a una distancia variable  $y$  sobre su centro.





El campo eléctrico viene dado por la expresión  $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ . En este caso los

vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por:  $\vec{r} = y \hat{j}$  y  $\vec{r}' = x \hat{i}$ . Luego  $(\vec{r} - \vec{r}') = -x \hat{i} + y \hat{j}$  y su

módulo viene dado por  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . El campo se expresa entonces como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{dq (-x \hat{i} + y \hat{j})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pero la carga está distribuida homogéneamente en la varilla horizontal:  $dq = \lambda_0 dx$ , luego,

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{\lambda_0 dx (-x \hat{i} + y \hat{j})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando entre los límites  $-L$  y  $L$ , se tiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \lambda_0 \int_{-L}^L \frac{-x dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} + k \lambda_0 y \int_{-L}^L \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{j}$$

Calculando cada integral, tenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{i} k \lambda_0 \left. \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|_{-L}^L + \hat{j} k \lambda_0 y \left. \frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right|_{-L}^L$$

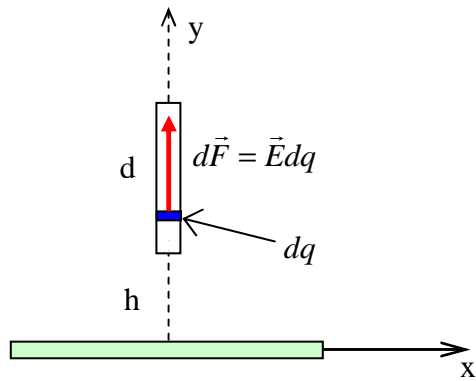
Sólo sobrevive la componente  $y$  del campo, ya que por argumentos de simetría vemos que la componente  $x$  debe anularse:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2k \lambda_0 L}{y \sqrt{L^2 + y^2}} \hat{j}}$$

Calculemos ahora la fuerza ejercida por el campo eléctrico de la varilla horizontal sobre cada elemento de carga diferencial  $dq = \lambda dy = \alpha y dy$  del alambre vertical de largo  $d$ , ubicado a una altura  $h$  sobre la varilla de horizontal.

Sabemos que sobre cada elemento diferencial de carga de la varilla vertical se ejerce una fuerza diferencial dada por la siguiente expresión:  $d\vec{F} = \vec{E} dq = \vec{E} \alpha y dy$

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas



Por lo tanto, la fuerza total sobre el alambre vertical viene dada por la integral desde  $y = h$  hasta  $y = h + d$

$$\vec{F} = \int_h^{h+d} \vec{E}dq = \int_h^{h+d} \frac{2k\lambda_0 L \alpha y dy}{y\sqrt{L^2 + y^2}} \hat{j}$$

Integrando

$$\vec{F} = 2k\lambda_0 \alpha L \int_h^{h+d} \frac{dy}{\sqrt{L^2 + y^2}} \hat{j} = 2k\lambda_0 \alpha L \ln \left( y + \sqrt{L^2 + y^2} \right)_h^{h+d} \hat{j}$$

Se tiene la fuerza pedida:

$$\boxed{\vec{F} = 2k\lambda_0 \alpha L \ln \left( \frac{h+d + \sqrt{L^2 + (h+d)^2}}{h + \sqrt{L^2 + h^2}} \right) \hat{j}}$$

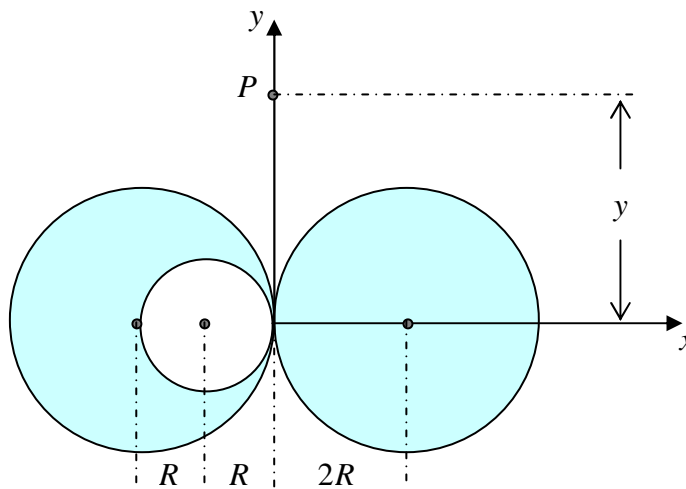
Solucionario

Primera Prueba de Electromagnetismo

Ingeniería Plan Común

Semestre de Primavera 2010

1. Se tiene dos esferas de radio  $2R$  cada una y ambas con la misma densidad volumétrica de carga  $\rho$  constante. En la esfera de la izquierda existe un agujero de radio  $R$ . Hallar el campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto  $P$  ubicado justo sobre el eje  $Y$ .



**Solución:**

El campo eléctrico resultante en el punto  $P(0, y)$  viene dado por la superposición de los campos eléctricos creados por dos esferas idénticas de radio  $2R$  y densidad volumétrica de carga  $\rho$  y por el campo eléctrico creado por una esfera de radio  $R$  y densidad volumétrica de carga  $-\rho$  (esta última esfera corresponde al agujero esférico).

Dado que el punto  $P(0, y)$  está afuera de todas las esferas, calcularemos el campo eléctrico fuera de una esfera usando ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$$

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

Usando una Gaussiana esférica de radio  $r$  mayor que el radio de la esfera, y considerando que la dirección del campo eléctrico es paralela a la diferencial de superficie en cada punto, se tiene

$$\oint E dS = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$$

Dado que el módulo del campo eléctrico  $E$  tiene el mismo valor sobre la superficie de la esfera Gaussiana, podemos sacar  $E$  fuera de la integral,

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{neta}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{kq_{neta}}{r^2}$$

Obteniéndose finalmente:

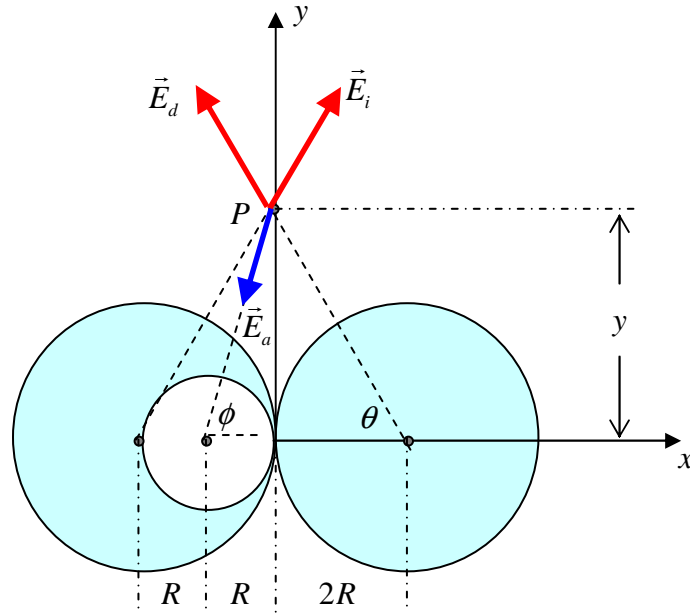
$$E = \frac{kq_{neta}}{r^2}$$

Nota: El campo eléctrico exterior a una distribución esférica de carga tiene la misma forma que el campo eléctrico creado por una carga puntual.

Ahora que tenemos conocido el valor del módulo del campo eléctrico fuera de cada esfera, calculemos para cada una de ellas el valor del campo vectorial, es decir, debemos hallar para cada una de las esferas, el campo eléctrico en la forma:

$$\vec{E} = \frac{kq_{neta}}{r^2} \hat{e}$$

donde  $\hat{e}$  es un vector unitario en la dirección que va desde el origen de la esfera de carga que crea el campo hacia el punto  $P(0, y)$  donde se medirá el campo. Sea  $\vec{E}_d$  el campo creado por la esfera de la derecha,  $\vec{E}_i$  el campo creado por la esfera izquierda y  $\vec{E}_a$  el campo creado por el agujero (ver figura)



Los vectores unitarios vienen dados en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  en la forma:

$$\hat{e}_d = -\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad \hat{e}_i = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad \hat{e}_a = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$$

donde

$$\cos \theta = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{4R^2 + y^2}},$$

$$\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}}, \quad \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

$$\hat{e}_d = -\frac{2R}{\sqrt{4R^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{4R^2 + y^2}} \hat{j}$$

$$\hat{e}_i = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{4R^2 + y^2}} \hat{j}$$

$$\hat{e}_a = \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \hat{j}$$

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

Calculemos ahora la carga neta de cada esfera, recordando que la densidad volumétrica de carga es constante y que el volumen de la esfera es  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ , es decir,

$q = \int \rho dV = \rho V = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$ . Usando esta expresión para cada esfera tenemos:

$$q_d = \frac{\rho 4\pi (2R)^3}{3} = \frac{32\rho\pi R^3}{3},$$

$$q_i = \frac{\rho 4\pi (2R)^3}{3} = \frac{32\rho\pi R^3}{3},$$

$$q_a = \frac{-\rho 4\pi R^3}{3}$$

Ahora podemos escribir cada campo eléctrico:

$$\vec{E}_d = \frac{kq_d}{r_d^2} \hat{e}_d = \frac{kq_d}{(4R^2 + y^2)} \hat{e}_d$$

$$\vec{E}_d = \frac{32k\rho\pi R^3}{3(4R^2 + y^2)} \left( -\frac{2R}{\sqrt{4R^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{4R^2 + y^2}} \hat{j} \right)$$

$$\boxed{\vec{E}_d = \frac{32k\rho\pi R^3}{3(4R^2 + y^2)^{3/2}} (-2R \hat{i} + y \hat{j})}$$

$$\boxed{\vec{E}_d = \frac{8\rho R^3}{3\epsilon_0 (4R^2 + y^2)^{3/2}} (-2R \hat{i} + y \hat{j})}$$

Del mismo modo se obtiene  $\vec{E}_i$

$$\boxed{\vec{E}_i = \frac{32k\rho\pi R^3}{3(4R^2 + y^2)^{3/2}} (2R \hat{i} + y \hat{j})}$$

$$\boxed{\vec{E}_i = \frac{8\rho R^3}{3\epsilon_0 (4R^2 + y^2)^{3/2}} (2R \hat{i} + y \hat{j})}$$

El campo del agujero viene dado por:

$$\vec{E}_a = \frac{kq_a}{r_a^2} \hat{e}_a = \frac{kq_a}{(R^2 + y^2)} \hat{e}_a$$

$$\vec{E}_a = -\frac{4k\rho\pi R^3}{3(R^2 + y^2)^{3/2}}(R\hat{i} + y\hat{j})$$

$$\vec{E}_a = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0(R^2 + y^2)^{3/2}}(R\hat{i} + y\hat{j})$$

El campo resultante de la superposición de los tres campos viene dado por:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_d + \vec{E}_i + \vec{E}_a$$

Reemplazando los valores obtenidos de cada campo eléctrico nos queda:

$$\vec{E}_R = \frac{32k\rho\pi R^3}{3(4R^2 + y^2)^{3/2}}(-2R\hat{i} + y\hat{j}) + \frac{32k\rho\pi R^3}{3(4R^2 + y^2)^{3/2}}(2R\hat{i} + y\hat{j}) - \frac{4k\rho\pi R^3}{3(R^2 + y^2)^{3/2}}(R\hat{i} + y\hat{j})$$

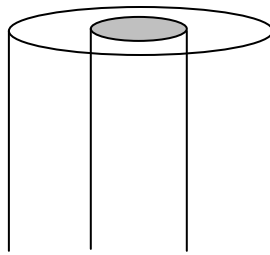
Simplificando obtenemos finalmente el campo resultante:

$$\vec{E}_R = -\frac{4k\rho\pi R^4}{3(R^2 + y^2)^{3/2}}\hat{i} + \frac{4k\rho\pi R^3 y}{3}\left(\frac{16}{(4R^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R^2 + y^2)^{3/2}}\right)\hat{j}$$

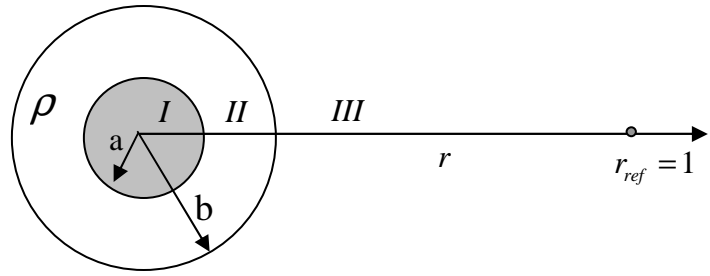
$$\vec{E}_R = -\frac{\rho R^4}{3\epsilon_0(R^2 + y^2)^{3/2}}\hat{i} + \frac{\rho R^3 y}{3\epsilon_0}\left(\frac{16}{(4R^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R^2 + y^2)^{3/2}}\right)\hat{j}$$

2. a) Hallar el campo eléctrico  $E(r)$  en cada una de las tres regiones  $I$ ,  $II$  y  $III$  indicadas en la figura para la configuración formada por cilindros muy largos de radios  $a$  y  $b$ . Considere que todo el estudio se hará para valores de  $r$  tales que  $a < b < 1$  y  $r \leq 1$ . En el centro existe un cilindro metálico de radio  $a$  sin carga neta, rodeado por una distribución de carga radialmente simétrica dada por  $\rho = \frac{\alpha}{r}$  para  $a \leq r \leq b$  con  $\alpha = cte$ . b) Calcular el potencial electrostático  $V(r)$  en cada región, sabiendo que el punto de referencia  $r_{ref}$  donde el potencial se hace cero  $V(r_{ref}) = 0$  es justo el punto  $r_{ref} = 1$ , tal como se muestra en la figura de la derecha.

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas



Vista de perfil



Vista de frente indicando las regiones

#### Solución:

Región I:  $0 \leq r \leq a$ .

Se trata de un metal descargado en equilibrio electrostático, por lo tanto:

$$E_I = 0$$

Región II:  $a \leq r \leq b$

En esta región existe una distribución volumétrica de carga dada por  $\rho = \frac{\alpha}{r}$ .

Dado que los cilindros son muy largos, existe suficiente simetría para que podamos usar la

$$\text{ley de Gauss } \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{neto}}}{\epsilon_0}$$

Consideremos una Gaussiana cilíndrica de altura  $h$  y de radio  $r$ , tal que  $a \leq r \leq b$ .

Sabemos que la dirección del campo eléctrico es paralela a la diferencial de superficie en

cada punto del manto cilíndrico, por lo tanto se cumple que  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS$ , y además

sabemos que no hay contribución al flujo en las tapas de la superficie Gaussiana cilíndrica,

porque en las tapas el campo eléctrico  $\vec{E}$  es perpendicular a la diferencial de superficie  $d\vec{S}$  de la tapa, por lo tanto, la ley de Gauss queda:

$$\oint EdS = \int_{\text{manto}} EdS = \frac{q_{\text{neto}}}{\epsilon_0}$$

Además el módulo del campo eléctrico es constante sobre el manto cilíndrico, por lo que puede ser sacado del signo integral, obteniéndose:

$$E \int_{\text{manto}} dS = \frac{q_{\text{neto}}}{\epsilon_0}$$



Usando la expresión para la superficie del manto de la Gaussiana nos queda

$$E 2\pi r h = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$$

Calculemos la carga total encerrada en la Gaussiana de radio  $r$

$$q_{neta} = \int \rho dV = \int_a^r \left( \frac{\alpha}{r} \right) (2\pi r dr h) = 2\pi\alpha h \int_a^r dr$$

$$q_{neta} = 2\pi\alpha h (r - a)$$

Reemplazando en Gauss  $E 2\pi r h = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$ , nos queda

$$E 2\pi r h = \frac{2\pi\alpha h (r - a)}{\epsilon_0}$$

Simplificando se tiene finalmente el campo eléctrico en la Región II:

$$\boxed{E_{II} = \frac{\alpha (r - a)}{\epsilon_0 r} = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{a}{r} \right)}$$

Región III:  $b \leq r \leq r_{ref} = 1$

Usamos una Gaussiana cilíndrica de altura  $h$  y radio  $r$ , tal que,  $b \leq r \leq r_{ref} = 1$ . Haciendo las mismas consideraciones anteriores respecto a las simetrías del problema, podemos escribir

$$E 2\pi r h = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$$

Donde

$$q_{neta} = \int \rho dV = \int_a^b \left( \frac{\alpha}{r} \right) (2\pi r dr h) = 2\pi\alpha h (b - a)$$

$$q_{neta} = 2\pi\alpha h (b - a)$$

Reemplazando en la ley de Gauss

$$E 2\pi r h = \frac{2\pi\alpha h (b - a)}{\epsilon_0}$$

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

Se obtiene el campo eléctrico en la Región III:

$$E_{III} = \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0 r}$$

Cálculo del potencial electrostático  $V(\vec{r})$  en cada una de las regiones:

Como método de cálculo del potencial usaremos la expresión:

$$V(\vec{r}) = - \int_{r_{ref}}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Expresión en la que se considera que

$$V(r_{ref}) = 0$$

En nuestro caso la referencia  $r_{ref}$  está en  $r_{ref} = 1$ .

Nota: Cuando nos movemos desde  $r_{ref} = 1$  hasta algún punto  $r$  del sistema de cargas, se cumple que  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edl$ , pero a su vez,  $dl = -dr$ , por lo tanto, para este problema, siempre podemos escribir la siguiente expresión para el potencial

$$V(\vec{r}) = - \int_{r_{ref}}^r E dr$$

Potencial en la Región III:  $b \leq r \leq r_{ref} = 1$

$$V_{III} = - \int_{r_{ref}}^{r \geq b} E_{III} dr$$

Usando  $E_{III} = \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0 r}$ , obtenemos

$$V_{III} = - \int_{r_{ref}}^{r \geq b} \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0 r} dr = - \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0} \int_{r_{ref}}^{r \geq b} \frac{dr}{r}$$

$$V_{III} = - \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0} \ln \left( \frac{r}{r_{ref}} \right)$$

pero  $r_{ref} = 1$ , por lo tanto el potencial electrostático en la Región III viene dado por:

$$V_{III}(r) = - \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0} \ln r$$

Potencial en la Región II:  $a \leq r \leq b$

$$V_{II} = - \int_{r_{ref}}^{r < b} E dr = - \int_{r_{ref}}^b E_{III} dr - \int_b^r E_{II} dr$$

La primera integral no es más que el potencial  $V_{III}(r)$  evaluado en  $r=b$ , es decir,

$$V_{III}(r=b) = - \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0} \ln b. \text{ Usando además el campo en la Región II: } E_{II} = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{r}\right),$$

podemos escribir

$$V_{II} = - \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0} \ln b - \int_b^r E_{II} dr$$

$$V_{II} = - \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0} \ln b - \frac{\alpha}{\epsilon_0} \int_b^r \left(1 - \frac{a}{r}\right) dr$$

Evalutando la integral

$$V_{II} = - \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0} \ln b - \frac{\alpha}{\epsilon_0} (r - a \ln r)_b^r$$

$$V_{II} = - \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0} \ln b - \frac{\alpha}{\epsilon_0} ((r-b) - a \ln r + a \ln b)$$

$$V_{II} = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \{ (a-b) \ln b - (r-b) + a \ln r - a \ln b \}$$

$$\boxed{V_{II}(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \{ -b \ln b + a \ln r - (r-b) \}}$$

Potencial en la Región I:  $r \leq a$  (dentro del metal descargado)

$$V_I = - \int_{r_{ref}}^{r < a} E dr = - \int_{r_{ref}}^b E_{III} dr - \int_b^a E_{II} dr - \int_a^r E_I dr$$

El campo eléctrico en la Región I vale cero,  $E_I = 0$ , luego el potencial electrostático en el metal resulta ser independiente de  $r$ , es decir, todo el volumen y la superficie del metal tiene el mismo valor del potencial. Esto significa que no se necesita realizar trabajo eléctrico para mover una carga de un punto a otro en el metal.

$$V_I(r) = - \int_{r_{ref}}^b E_{III} dr - \int_b^a E_{II} dr$$

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

Las dos primeras integrales representan el potencial  $V_{II}(r)$  justo en el punto  $r = a$ , es decir,

$$V_{II}(r = a) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \{-b \ln b + a \ln a - (a - b)\}$$

Por lo tanto, el potencial electrostático en cualquier punto del metal vale:

$$V_I(r) = V_{II}(r = a) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \{-b \ln b + a \ln a - (a - b)\}$$

$$V_I(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \{-b \ln b + a \ln a - (a - b)\}$$

En resumen, el potencial en todo el espacio viene dado por:

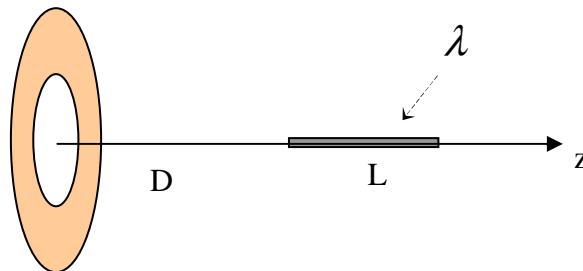
$$V(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\epsilon_0} \{-b \ln b + a \ln a - (a - b)\} & \text{si } 0 \leq r \leq a \\ \frac{\alpha}{\epsilon_0} \{-b \ln b + a \ln r - (r - b)\} & \text{si } a \leq r \leq b \\ -\frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0} \ln r & \text{si } b \leq r \leq r_{ref} \end{cases}$$

Nótese que el potencial es continuo en todo el espacio, es decir,

$$V_{III}(b) = V_{II}(b) = -\frac{\alpha}{\epsilon_0} (b - a) \ln b$$

$$V_{II}(a) = V_I(a) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \{-b \ln b + a \ln a - (a - b)\}$$

3. Problema obligatorio. La corona circular mostrada en la figura tiene una densidad de carga uniforme  $\sigma$  y radio interior  $r_i = a$  y radio exterior  $r_e = b$ . Justo sobre el eje de la corona y a una distancia  $D$  de su centro se encuentra una varilla de largo  $L$  que tiene una densidad lineal de carga uniforme  $\lambda$ . Calcule la fuerza resultante  $\vec{F}$  ejercida por la corona sobre la varilla.



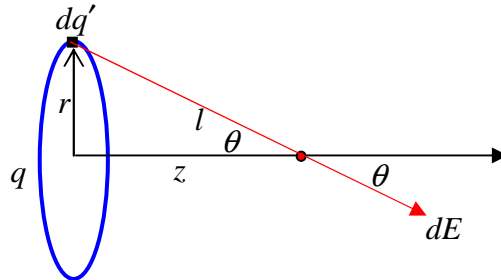
### Solución:

Este problema puede ser resuelto de varias maneras. En primer lugar elegiremos hacerlo considerando que la corona esta formada de un número infinito de alambres circunferenciales de radio  $r$  que lleva una carga diferencial  $dq'$ , cada uno de los cuales produce un campo diferencial  $dE$  que apunta a lo largo del eje de simetría del alambre y de la corona. En segundo lugar lo haremos empleando el campo creado por un elemento de carga de la corona en un punto sobre su eje de simetría.

Primer metodo:

Campo eléctrico creado por un alambre circular cargado:

Calculemos el campo creado por un alambre de radio  $r$  y carga  $q$  a una distancia  $z$  sobre el eje de simetría del alambre. La figura muestra el campo diferencial  $dE$  creado por una carga diferencial  $dq'$  en un punto del eje  $z$ .



Usando la ley de Coulomb, el módulo  $dE$  del campo viene dado por

$$dE = \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{k dq'}{l^2}$$

donde  $l = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z^2}$ .

Por simetría, el campo total creado por el alambre sólo tiene componente a lo largo del eje  $z$ :

$$E = \int \frac{k dq'}{l^2} \cos \theta$$

donde  $\cos \theta = \frac{z}{l}$

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

se obtiene

$$E = \int \frac{k z dq'}{l^3}$$

Pero cuando se recorre todo el alambre circular para generar el campo resultante, no varían ni  $z$  ni  $l$ , por lo que pueden ser sacados de la integral

$$E = \frac{k z}{l^3} \int dq'$$

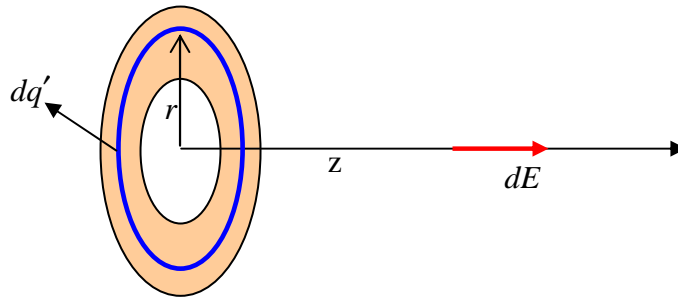
La integral no es más que la carga total del alambre  $q = \int dq'$ , así que el campo total creado por el alambre viene dado por

$$E = \frac{k q z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Campo eléctrico creado por una corona circular cargada:

Consideramos que la corona está formada por un número infinito de alambres de distintos radios, y que cada alambre de carga diferencial  $dq'$  genera un campo diferencial  $dE$ . Este campo diferencial es justamente el campo del alambre recién encontrado:

$$dE = \frac{k dq' z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$



donde  $dq'$  se expresa en función de la densidad superficial de carga  $\sigma = \frac{dq'}{dA}$  en la forma

$$dq' = \sigma dA.$$

El campo total es la suma o superposición de todos estos campos diferenciales, es decir,

$$E = \int_{r=a}^{r=b} dE = \int_{r=a}^{r=b} \frac{k z dq'}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \int_{r=a}^{r=b} \frac{k z \sigma dA}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

La diferencial de superficie de la corona viene dada por  $dA = 2\pi r dr$ , por lo tanto la integral queda

$$E = 2\pi k \sigma z \int_{r=a}^{r=b} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Integrando

$$E = 2\pi k \sigma z \left. \frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right|_a^b$$

Simplificando, obtenemos la forma final del campo creado por la corona:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]$$

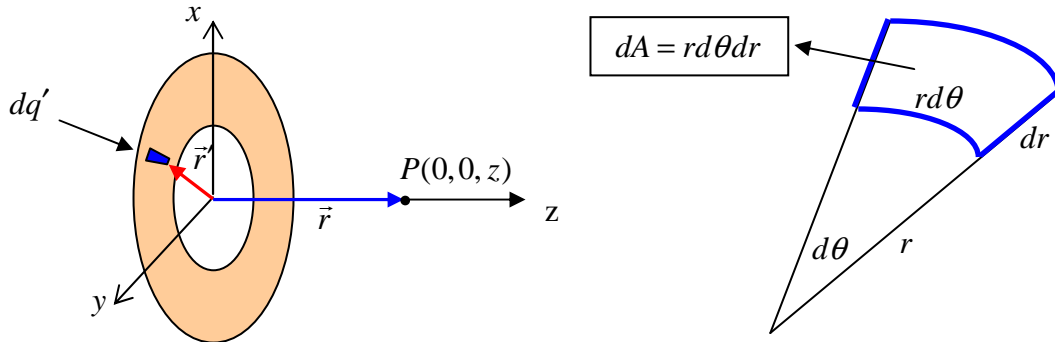
Segundo método.

Campo eléctrico creado por un elemento diferencial de carga localizado en la corona.

El origen del sistema de referencia está en el centro de la corona, por lo tanto, de acuerdo a la figura, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  vienen dados por:

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$\vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j}$$



Expresando  $x$  e  $y$  en coordenadas polares, tenemos:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

donde  $r$  es el radio de la circunferencia que pasa por el elemento diferencial de carga de coordenadas polares  $(r, \theta)$  y  $\theta$  es el ángulo que hace dicho elemento diferencial de carga

### 2.3.1 Unidad II: Solucionario de Pruebas

con el eje  $x$ . La corona se genera cuando  $r$  varía desde  $r = a$  hasta  $r = b$  y el ángulo  $\theta$  varía desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = 2\pi$ .

Entonces,

$$\vec{r} - \vec{r}' = -r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}$$

y su módulo vale:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

El campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

donde  $dq' = \sigma dA' = \sigma (r d\theta dr)$ , reemplazando arriba, nos queda:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k \sigma (r d\theta dr) (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k})}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Las integrales sobre los ángulos se anulan, y sólo queda la componente  $z$

$$E(z) = k \sigma z \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = k 2\pi \sigma z \int_a^b \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Integrando

$$E(z) = k 2\pi \sigma z \left( \frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)_a^b$$

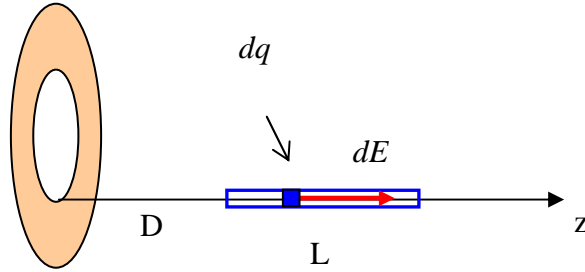
Obtenemos la misma expresión que antes del campo eléctrico de una corona de carga:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]$$

Cálculo de la fuerza eléctrica sobre una varilla cargada:

Ahora calcularemos la fuerza eléctrica sobre la varilla. La fuerza diferencial  $dF$  sobre cada carga diferencial  $dq$  de la varilla viene dada por la expresión  $dF = dq E$ , donde  $E$  es el campo eléctrico generado por la corona sobre su eje  $z$  que acabamos de calcular.





La diferencial de carga se expresa en función de la densidad lineal de carga  $\lambda$  en la forma  $dq = \lambda dz$ . La fuerza resultante sobre el alambre viene dada por

$$F = \int_D^{D+L} dq E = \int_D^{D+L} \lambda dz E$$

Usando el valor del campo recién encontrado  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]$ , se tiene

$$F = \frac{\lambda \sigma}{2\epsilon_0} \int_D^{D+L} \frac{z dz}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{\lambda \sigma}{2\epsilon_0} \int_D^{D+L} \frac{z dz}{\sqrt{b^2 + z^2}}$$

Integrando tenemos la fuerza total sobre la varilla

$$F = \frac{\lambda \sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{a^2 + (D+L)^2} - \sqrt{a^2 + D^2} - \sqrt{b^2 + (D+L)^2} + \sqrt{b^2 + D^2} \right]$$



### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

#### Solucionario

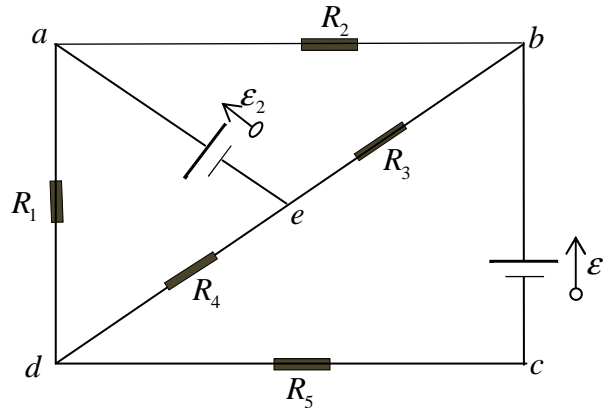
Segunda Prueba de Cátedra

Electromagnetismo FI-604

Semestre de Primavera 2012

1. El circuito de la figura tiene todas las resistencias iguales y valen  $R = 1(\Omega)$ . Las Fem valen  $\mathcal{E}_1 = 10(V)$  y  $\mathcal{E}_2 = 6(V)$ . Calcule:

- La corriente eléctrica en cada resistencia.
- La diferencia de potencial entre los puntos  $d$  y  $b$ , es decir, calcular  $\Delta V_{db} = (V_b - V_d)$ .



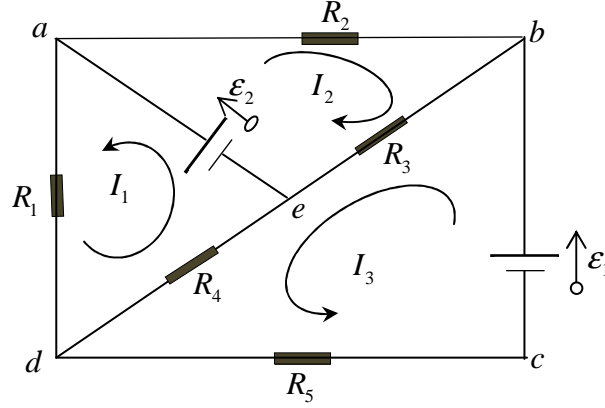
#### Solución:

- Calcular la corriente eléctrica en cada resistencia.

Elegimos método de corriente por malla en la forma que se indica en la figura.

Usando las ecuaciones de Kirchhoff para la suma de las diferencias de potencial en cada malla, se obtienen las siguientes ecuaciones, según la malla indicada y la dirección indicada para recorrerla:

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas



mallas:  $aeda$  :

$$-\varepsilon_2 + (I_1 - I_3)R_4 + I_1R_1 = 0 \quad (1.1)$$

mallas:  $aeba$  :

$$-\varepsilon_2 + (I_2 + I_3)R_3 + I_2R_2 = 0 \quad (1.2)$$

mallas:  $bcdcb$  :

$$-\varepsilon_1 + I_3R_5 + (I_3 - I_1)R_4 + (I_2 + I_3)R_3 = 0 \quad (1.3)$$

Usando los datos numéricos se tiene:

$$\begin{aligned} 2I_1 - I_3 &= 6 \\ 2I_2 + I_3 &= 6 \\ 3I_3 - I_1 + I_2 &= 10 \end{aligned} \quad (1.4)$$

despejando, se obtienen las corrientes por malla:

$$I_1 = 5.5(A), \quad I_2 = 0.5(A), \quad I_3 = 5.0(A) \quad (1.5)$$

Por la resistencia  $R_4$  pasa la corriente neta  $I_{R_4}$

$$I_{R_4} = I_1 - I_3 = 5.5(A) - 5.0(A) = 0.5(A) \quad (1.6)$$

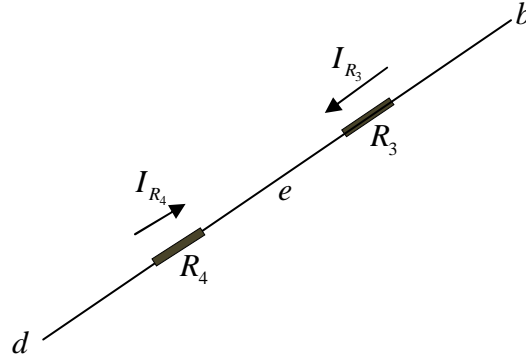
Por la resistencia  $R_3$  pasa la corriente neta  $I_{R_3}$

$$I_{R_3} = I_2 + I_3 = 0.5(A) + 5.0(A) = 5.5(A) \quad (1.7)$$

b) Calcular la diferencia de potencial entre los puntos  $d$  y  $b$ , es decir, calcular

$$\Delta V_{db} = (V_b - V_d).$$

La figura muestra la región donde calcularemos la diferencia de potencial y las corrientes que circulan.



Siguiendo el camino  $deb$ , se tiene

$$V_d - I_{R_4} R_4 + I_{R_3} R_3 = V_b \quad (1.8)$$

despejando la diferencia de potencial  $\Delta V_{db} = V_b - V_d$ , se tiene

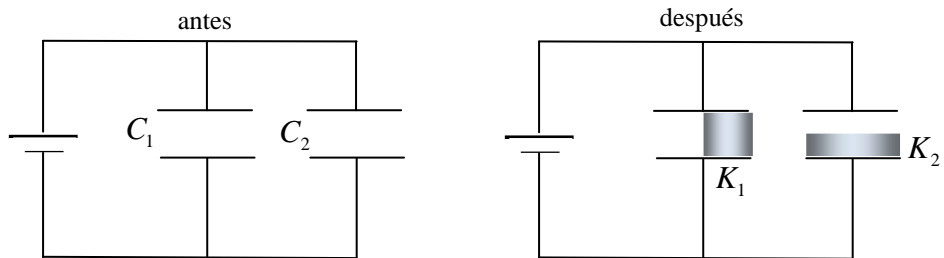
$$\Delta V_{db} = V_b - V_d = -I_{R_4} R_4 + I_{R_3} R_3 \quad (1.9)$$

usando los valores numéricos, obtenemos

$$\Delta V_{db} = V_b - V_d = -0.5(A) \times 1(\Omega) + 5.5(A) \times 1(\Omega) = 5.0(V) \quad (1.10)$$

$$\Delta V_{db} = V_b - V_d = 5.0(V) \quad (1.11)$$

2. Se tienen dos condensadores de placas paralelas  $C_1$  y  $C_2$ , ambos, de área  $A$  y separación  $d$ , con capacitancias iguales  $C_0$ . Ambos condensadores se mantienen conectados a una Fem de valor  $\Delta V_0$ . Luego se introduce un dieléctrico distinto en cada uno de los condensadores en la forma que se indica. En  $C_1$  el dieléctrico tiene constante  $K_1$  y ocupa la mitad del área de las placas. En  $C_2$  el dieléctrico tiene constante  $K_2$  y espesor  $\left(\frac{d}{2}\right)$ .



### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

*Antes de introducir los dieléctricos, calcular:*

- a) La capacitancia equivalente.
- b) Las cargas iniciales  $Q_{1,i}$  y  $Q_{2,i}$  en cada condensador

*Después de introducir los dieléctricos, calcular:*

- c) La capacitancia de  $C_1$  y  $C_2$ .
- d) La capacitancia equivalente del sistema.
- e) Las cargas finales  $Q_{1,f}$  y  $Q_{2,f}$  en cada condensador.

#### **Solución:**

*Antes de introducir los dieléctricos.*

a) *Calcular la capacitancia equivalente.*

Dado que los condensadores están en paralelo, y que  $C_1 = C_2 = C_0$ , se tiene

$$C_{eq, inicial} = C_1 + C_2 = 2C_0 \quad (2.1)$$

La diferencia de potencial  $\Delta V_0$  del circuito equivalente es constante, luego, la carga total inicial vale

$$Q_{inicial} = C_{eq, paralelo} \Delta V_0 \quad (2.2)$$

$$Q_{inicial} = 2C_0 \Delta V_0 \quad (2.3)$$

b) *Calcular las cargas iniciales  $Q_{1,i}$  y  $Q_{2,i}$  en cada condensador.*

Cada condensador tiene la misma diferencia de potencial  $\Delta V_0$  porque están en paralelo, luego, la carga en cada uno de ellos viene dada por

$$Q_{1,i} = C_1 \Delta V_0 = C_0 \Delta V_0 \quad (2.4)$$

$$Q_{2,i} = C_2 \Delta V_0 = C_0 \Delta V_0 \quad (2.5)$$

Nótese que la carga total inicial  $Q_{inicial}$ , es igual a la suma de las cargas de cada condensador, como debe ser para una conexión en paralelo, es decir,

$$Q_{inicial} = Q_{1,i} + Q_{2,i} = 2C_0 \Delta V_0 \quad (2.6)$$

*Después de introducir los dieléctricos.*

- c) Calcular la capacitancia de  $C_1$  y  $C_2$ .

El condensador  $C_1$  se puede considerar como dos condensadores  $C_{1,1}$  y  $C_{1,2}$  conectados en paralelo, cada uno de los cuales ocupa la mitad del área  $A$  del condensador  $C_1$  original. La capacitancia de cada condensador viene dada por

$$C_{1,1} = \frac{\epsilon_0 \left( \frac{A}{2} \right)}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{2d} = \frac{C_0}{2}, \quad \text{dieléctrico aire} \quad (2.7)$$

$$C_{1,2} = \frac{k_1 \epsilon_0 \left( \frac{A}{2} \right)}{d} = \frac{k_1 \epsilon_0 A}{2d} = \frac{k_1 C_0}{2}, \quad \text{dieléctrico de cte. } k_1 \quad (2.8)$$

La capacitancia  $C_{1,f}$  de los dos condensadores conectados en paralelo, viene dada por

$$C_{1,f} = C_{1,1} + C_{1,2} = \frac{C_0}{2} + \frac{k_1 C_0}{2} = \left( \frac{1+k_1}{2} \right) C_0 \quad (2.9)$$

$$C_{1,f} = \left( \frac{1+k_1}{2} \right) C_0 \quad (2.10)$$

La capacitancia crece porque  $\left( \frac{1+k_1}{2} \right) \geq 1$ .

El condensador  $C_2$  se puede considerar como dos condensadores  $C_{2,1}$  y  $C_{2,2}$  conectados en serie, cada uno de los cuales tiene área  $A$  pero tiene la mitad de la separación de placas del condensador  $C_1$  original. La capacitancia de cada condensador viene dada por

$$C_{2,1} = \frac{\epsilon_0 A}{\left( \frac{d}{2} \right)} = \frac{2\epsilon_0 A}{d} = 2C_0, \quad \text{dieléctrico aire} \quad (2.11)$$

$$C_{2,2} = \frac{k_2 \epsilon_0 A}{\left( \frac{d}{2} \right)} = \frac{2k_2 \epsilon_0 A}{d} = 2k_2 C_0, \quad \text{dieléctrico de cte. } k_2 \quad (2.12)$$

La capacitancia  $C_{2,f}$  de los dos condensadores conectados en serie, viene dada por

$$\frac{1}{C_{2,f}} = \frac{1}{C_{2,1}} + \frac{1}{C_{2,2}} = \frac{1}{2C_0} + \frac{1}{2k_2 C_0} = \frac{(1+k_2)}{2k_2 C_0} \quad (2.13)$$

Invirtiendo este resultado se obtiene la capacitancia  $C_{2,f}$  de los dos condensadores  $C_{2,1}$  y  $C_{2,2}$  conectados en serie

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

$$C_{2,f} = \left( \frac{2k_2}{1+k_2} \right) C_0 \quad (2.14)$$

La capacitancia crece porque  $\left( \frac{2k_2}{1+k_2} \right) \geq 1$ .

d) Calcular la capacitancia equivalente del sistema.

Ahora que hemos encontrado la capacitancia de cada condensador después de introducir los dieléctricos, podemos calcular la capacitancia equivalente total debida a la conexión en paralelo de  $C_{1,f}$  y  $C_{2,f}$ . Recordemos que las capacitancias en paralelo se suman, luego

$$C_{eq,final} = C_{1,f} + C_{2,f} \quad (2.15)$$

Reemplazando los valores encontrados en (2.10) y (2.14), tenemos

$$C_{eq,final} = C_{1,f} + C_{2,f} = \left( \frac{1+k_1}{2} \right) C_0 + \left( \frac{2k_2}{1+k_2} \right) C_0 \quad (2.16)$$

$$C_{eq,final} = \left( \frac{1+k_1}{2} + \frac{2k_2}{1+k_2} \right) C_0 \quad (2.17)$$

$$C_{eq,final} = \left( \frac{(1+k_1)(1+k_2) + 4k_2}{2(1+k_2)} \right) C_0 \quad (2.18)$$

e) Calcular las cargas finales  $Q_{1,f}$  y  $Q_{2,f}$  en cada condensador.

En principio podemos ver que la carga total final  $Q_{final}$  viene dada por

$$Q_{final} = C_{eq,final} \Delta V_0 \quad (2.19)$$

$$Q_{final} = \left( \frac{(1+k_1)(1+k_2) + 4k_2}{2(1+k_2)} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (2.20)$$

Reemplazando la carga total inicial  $Q_{inicial} = 2C_0 \Delta V_0$ , dada por relación (2.3) en  $Q_{final}$ , tenemos la siguiente relación entre las cargas totales inicial y final:

$$Q_{final} = \left( \frac{(1+k_1)(1+k_2) + 4k_2}{4(1+k_2)} \right) Q_{inicial} \quad (2.21)$$

Pero la cantidad entre paréntesis es mayor o igual que uno, es decir,

$$\frac{(1+k_1)(1+k_2) + 4k_2}{4(1+k_2)} \geq 1 \quad (2.22)$$



La igualdad se cumple sólo para el caso límite  $k_1 = k_2 = 1$ . En general, la carga total final  $Q_{final}$  es mayor que la carga total inicial  $Q_{inicial}$ , es decir,  $Q_{final} \geq Q_{inicial}$ . Este aumento de carga lo entrega la Fem que está siempre conectada.

Ahora podemos estudiar la carga final en cada condensador con dieléctrico. Dado que ambos están conectados en paralelo, se cumple que

$$Q_{1,f} = C_{1,f} \Delta V_0 \quad (2.23)$$

$$Q_{2,f} = C_{2,f} \Delta V_0 \quad (2.24)$$

Usando los valores de  $C_{1,f}$  y  $C_{2,f}$ , dados por (2.10) y (2.14), respectivamente, obtenemos

$$Q_{1,f} = \left( \frac{1+k_1}{2} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (2.25)$$

$$Q_{2,f} = \left( \frac{2k_2}{1+k_2} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (2.26)$$

Finalmente podemos expresar estos resultados en función de la carga inicial de cada condensador por separado, es decir, en función de  $Q_{1,i} = C_0 \Delta V_0$  y de  $Q_{2,i} = C_0 \Delta V_0$ .

$$Q_{1,f} = \left( \frac{1+k_1}{2} \right) Q_{1,i} \quad (2.27)$$

$$Q_{2,f} = \left( \frac{2k_2}{1+k_2} \right) Q_{2,i} \quad (2.28)$$

En consecuencia, la carga en ambos condensadores con dieléctrico ha crecido.

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

#### Solucionario

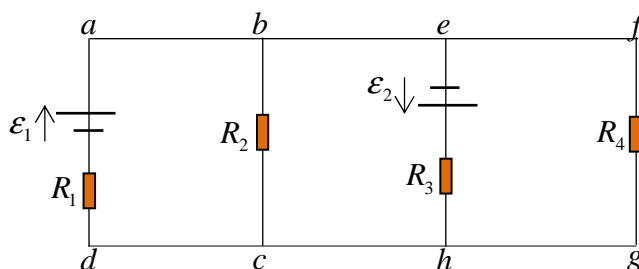
#### Segunda Prueba de Cátedra

#### Electromagnetismo FI-604

Semestre de Otoño 2014

1.- En el circuito de la figura, las resistencias valen:  $R_1 = 1(\Omega)$ ,  $R_2 = 2(\Omega)$ ,  $R_3 = 3(\Omega)$  y  $R_4 = 4(\Omega)$ , y las Fem valen  $\mathcal{E}_1 = 5(V)$  y  $\mathcal{E}_2 = 2(V)$ . Calcule:

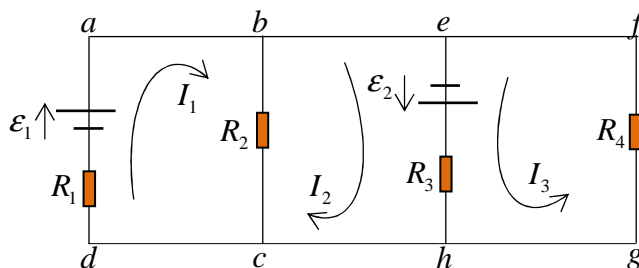
- c) (1.0 pto.) La corriente eléctrica en cada resistencia.
- d) (1.0 pto.) La diferencia de potencial entre los puntos  $h$  y  $e$ , es decir, calcular  $(V_h - V_e)$
- e) (1.0 pto.) La diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $g$ , es decir, calcular  $(V_a - V_g)$



#### Solución:

a) Calcule la corriente eléctrica en cada resistencia.

Usaremos el método de las corrientes por malla. Suponemos que las corrientes vienen como se indica en la figura.



Ahora podemos aplicar la ley de Kirchhoff que establece que la suma de diferencias de potencial en un circuito vale cero.

Trayectoria a-b-c-d-a:

$$R_2(I_2 - I_1) - R_1 I_1 + \varepsilon_1 = 0 \quad (1.1)$$

Trayectoria b-e-h-c-b:

$$\varepsilon_2 - R_3(I_2 + I_3) - R_2(I_1 - I_2) = 0 \quad (1.2)$$

Trayectoria a-b-e-f-g-h-c-d-a:

$$R_4 I_3 - R_1 I_1 + \varepsilon_1 = 0 \quad (1.3)$$

Usando los datos numéricos, las ecuaciones quedan:

$$-3I_1 + 2I_2 + 5 = 0 \quad (1.4)$$

$$2I_1 - 5I_2 - 3I_3 + 2 = 0 \quad (1.5)$$

$$4I_3 - I_1 + 5 = 0 \quad (1.6)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentran las tres corrientes:

$$I_1 = \frac{73}{25}(A) = 2,92(A) \quad (1.7)$$

$$I_2 = \frac{47}{25}(A) = 1,88(A) \quad (1.8)$$

$$I_3 = -\frac{13}{25}(A) = -0,52(A) \quad (1.9)$$

El signo negativo de la corriente  $I_3$  indica que el sentido de la corriente es el opuesto al que supusimos al comienzo, sin embargo, su valor numérico está correcto.

La corriente que cruza por  $R_1$  es  $I_1 = 2,92(A)$ , subiendo. La corriente que cruza por  $R_4$  es  $I_3 = 0,52(A)$ , bajando. Las corrientes netas que cruzan las resistencias  $R_2$  y  $R_3$  son las siguientes:

$$R_2 \Rightarrow I_{R_2} = I_1 - I_2 = (2,92 - 1,88) = 1,04(A) = \frac{26}{25}(A), \text{ bajando} \quad (1.10)$$

$$R_3 \Rightarrow I_{R_3} = I_2 + I_3 = 1,88 + (-0,52) = 1,36(A) = \frac{34}{25}(A), \text{ bajando} \quad (1.11)$$

b) Calcule la diferencia de potencial entre los puntos  $h$  y  $e$ , es decir, calcular  $(V_h - V_e)$ .

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

Siguiendo el camino especificado, se tiene

$$V_e + \mathcal{E}_2 - R_3(I_2 + I_3) = V_h \quad (1.12)$$

despejando

$$V_h - V_e = 2 - 3\left(\frac{47}{25} - \frac{13}{25}\right) \quad (1.13)$$

$$V_h - V_e = -\frac{52}{25}(V) = -2.08(V) \quad (1.14)$$

c) Calcule la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $g$ , es decir, calcular  $(V_a - V_g)$ .

Siguiendo el camino a-d-c-h-g, se tiene

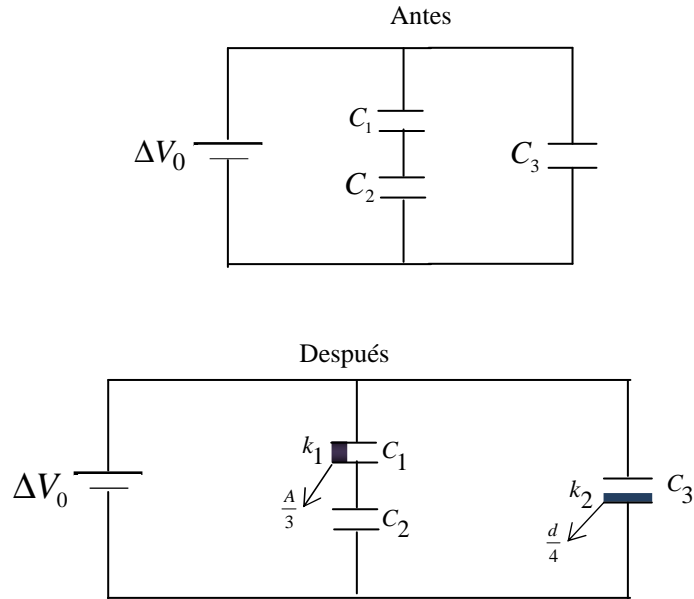
$$V_a - \mathcal{E}_1 + R_1 I_1 = V_g \quad (1.15)$$

despejando

$$V_a - V_g = \mathcal{E}_1 - R_1 I_1 \quad (1.16)$$

$$V_a - V_g = 5 - 2.92 = +\frac{52}{25}(A) = +2.08(A) \quad (1.17)$$

2.- Se tienen tres condensadores  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  de placas paralelas, idénticos, de capacitancia  $C_0$  cada uno. La conexión mixta de los condensadores se mantiene conectada a una Fem de valor  $\Delta V_0$  como lo muestra la figura 1. Luego se introducen dieléctricos de constantes  $k_1$  y  $k_2$  como se indica, y en la forma que se indica, de modo que el dieléctrico de constante  $k_1$  llena justo *un tercio del área*  $(\frac{A}{3})$  de las placas del condensador  $C_1$ , y el dieléctrico de constante  $k_2$  llena *un cuarto de la distancia*  $(\frac{d}{4})$  que separa las placas del condensador  $C_3$ .



*Antes de introducir los dieléctricos, calcular*

- a) La capacitancia equivalente del sistema
- b) La carga total inicial del sistema.
- c) Las cargas iniciales  $Q_{1,i}$ ,  $Q_{2,i}$  y  $Q_{3,i}$  en cada condensador
- d) Las diferencias de potencial  $\Delta V_{1,i}$ ,  $\Delta V_{2,i}$  y  $\Delta V_{3,i}$  a través de cada condensador.

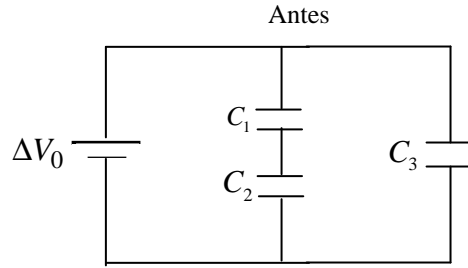
*Después de introducir los dieléctricos, calcular*

- e) La capacitancia equivalente de los condensadores con dieléctrico.
- f) La capacitancia equivalente del sistema.
- g) La carga total final del sistema
- h) Las cargas finales  $Q_{1,f}$ ,  $Q_{2,f}$  y  $Q_{3,f}$  en cada condensador.
- i) Las diferencias de potencial final  $\Delta V_{1,f}$  y  $\Delta V_{2,f}$  y  $\Delta V_{3,f}$  a través de cada condensador.

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

#### Solución:

*Antes de introducir los dieléctricos, calcular*



*a) La capacitancia equivalente del sistema.*

Todos los condensadores tienen capacitancia  $C_0$ . Los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  están en serie, luego su capacitancia equivalente viene dada por:

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_0} = \frac{2}{C_0} \quad (2.1)$$

Invirtiendo la relación, se tiene,  $C_{12} = \frac{C_0}{2}$ . Este condensador equivalente esta en paralelo con  $C_3$ , por lo tanto,  $C_{tot}$  la capacitancia equivalente de todo el circuito viene dada por:

$$C_{tot} = C_{12} + C_3 = \frac{C_0}{2} + C_0 = \frac{3}{2}C_0 \quad (2.2)$$

*b) La carga total inicial del sistema.*

La carga total  $Q_{tot}$  está relacionada con la capacitancia total  $C_{tot}$  y la diferencia de potencial  $\Delta V_0$  entre las placas de  $C_{tot}$ , en la forma

$$Q_{tot} = C_{tot} \Delta V_0 \quad (2.3)$$

$$Q_{tot} = \frac{3}{2}C_0 \Delta V_0 \quad (2.4)$$

*c) Las cargas iniciales  $Q_{1,i}$ ,  $Q_{2,i}$  y  $Q_{3,i}$  en cada condensador*

Las cargas  $Q_{1,i}$  y  $Q_{2,i}$  que existen en los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  que están conectados en serie, se pueden calcular usando su capacitancia equivalente  $C_{12} = \frac{C_0}{2}$ . Nótese que

$C_{12}$  y  $C_3$  están conectados en paralelo, por lo tanto, la diferencia de potencial entre sus placas es la misma, es decir,

$$\Delta V_{12} = \Delta V_3 = \Delta V_0 \quad (2.5)$$

Por lo tanto, se cumplen las relaciones

$$Q_{12} = C_{12}\Delta V_{12} = \frac{1}{2}C_0\Delta V_0 \quad (2.6)$$

Dado que los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  están en serie, la carga en cada uno de ellos es la misma, por lo tanto,

$$Q_{12} = Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2}C_0\Delta V_0 \quad (2.7)$$

Para el condensador  $C_3$ , se cumple que

$$Q_{3,i} = C_3\Delta V_3 = C_0\Delta V_0 \quad (2.8)$$

d) Las diferencias de potencial  $\Delta V_{1,i}$ ,  $\Delta V_{2,i}$  y  $\Delta V_{3,i}$  a través de cada condensador.

Dado que los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  están en serie, se cumple que

$$\Delta V_0 = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (2.9)$$

Pero  $\Delta V_1 = \Delta V_2$  porque los dos condensadores son idénticos, por lo tanto

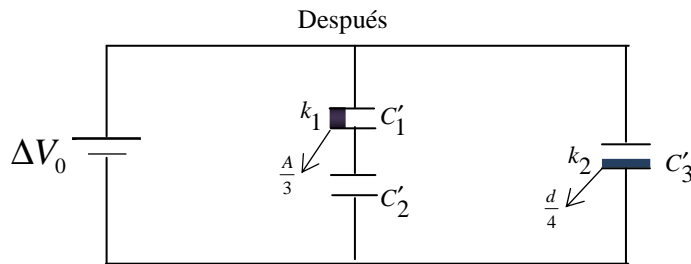
$$\Delta V_0 = \Delta V_{1,i} + \Delta V_{2,i} = 2\Delta V_{1,i} \quad (2.10)$$

$$\Delta V_{1,i} = \Delta V_{2,i} = \frac{\Delta V_0}{2} \quad (2.11)$$

y además,

$$\Delta V_{3,i} = \Delta V_0 \quad (2.12)$$

Después de introducir los dieléctricos, calcular



### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

e) *La capacitancia equivalente de los condensadores con dieléctrico.*

Las nuevas capacitancias de los condensadores serán indicadas con primas.

Analicemos el condensador  $C'_1$ . Este condensador está formado por dos condensadores en paralelo:

i) un condensador lleno con un dieléctrico de constante  $k_1$ , cuya área es  $\frac{A}{3}$  y su separación entre placas es  $d$ . Su capacitancia viene dada por

$$C'_{k_1} = \frac{k_1 \epsilon_0}{d} \left( \frac{A}{3} \right) = \frac{k_1}{3} \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) \quad (2.13)$$

ii) otro condensador con lleno con aire ( $k=1$ ), cuya área es  $\frac{2}{3}A$  y su separación entre placas es  $d$ . Su capacitancia viene dada por

$$C'_{k=1} = \frac{\epsilon_0}{d} \left( \frac{2A}{3} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) \quad (2.14)$$

Estas capacitancias se pueden escribir en función de  $C_0 = \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right)$ , en la forma,

$$C'_{k_1} = \frac{k_1}{3} C_0; \quad C'_{k=1} = \frac{2}{3} C_0 \quad (2.15)$$

Como estos dos condensadores están en paralelo, sus capacitancias se suman, es decir,

$$C'_1 = C'_{k_1} + C'_{k=1} = \frac{k_1}{3} C_0 + \frac{2}{3} C_0 \quad (2.16)$$

$$C'_1 = \frac{1}{3} C_0 (k_1 + 2) \quad (2.17)$$

El condensador  $C'_2$  no cambia, luego,  $C'_2 = C_0$ .

Los condensadores  $C'_1$  y  $C'_2$  están conectados en serie, por lo tanto la capacidad equivalente  $C'_{12}$ , viene dada por,

$$\frac{1}{C'_{12}} = \frac{1}{C'_1} + \frac{1}{C'_2} \quad (2.18)$$

Reemplazando los valores obtenidos,

$$\frac{1}{C'_{12}} = \frac{3}{C_0 (k_1 + 2)} + \frac{1}{C_0} \quad (2.19)$$



$$\frac{1}{C'_{12}} = \frac{(k_1 + 5)}{(k_1 + 2)C_0} \quad (2.20)$$

Finalmente, se obtiene la capacitancia equivalente  $C'_{12}$ ,

$$C'_{12} = \left( \frac{k_1 + 2}{k_1 + 5} \right) C_0 \quad (2.21)$$

Estudiemos ahora la capacitancia equivalente del condensador  $C'_3$ , el cual está formado por dos condensadores en serie:

i) un condensador lleno con un dieléctrico de constante  $k_2$ , cuya área es  $A$  y su separación entre placas es  $\left( \frac{d}{4} \right)$ . Su capacitancia viene dada por

$$C'_{k_2} = \frac{k_2 \epsilon_0}{\left( \frac{d}{4} \right)} A = 4k_2 \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) \quad (2.22)$$

ii) otro condensador con lleno con aire ( $k=1$ ), cuya área es  $A$  y su separación entre placas es  $\left( \frac{3d}{4} \right)$ . Su capacitancia viene dada por

$$C'_{k=1} = \frac{\epsilon_0}{\left( \frac{3d}{4} \right)} A = \frac{4}{3} \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) \quad (2.23)$$

Estas capacitancias se pueden escribir en función de  $C_0 = \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right)$ , en la forma,

$$C'_{k_2} = 4k_2 C_0; \quad C'_{k=1} = \frac{4}{3} C_0 \quad (2.24)$$

Estos dos condensadores están conectados en serie, luego, su capacitancia equivalente  $C'_3$ , viene dada por

$$\frac{1}{C'_3} = \frac{1}{C'_{k_2}} + \frac{1}{C'_{k=1}} \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{C'_3} = \frac{1}{4k_2 C_0} + \frac{1}{\frac{4C_0}{3}} \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{C'_3} = \left( \frac{1 + 3k_2}{4k_2 C_0} \right) \quad (2.27)$$

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

Finalmente,

$$C'_3 = \left( \frac{4k_2}{1+3k_2} \right) C_0 \quad (2.28)$$

f) *La capacitancia equivalente del sistema.*

La capacitancia equivalente del sistema  $C'_{tot}$  se obtiene usando los condensadores  $C'_{12}$  y  $C'_3$  conectados en paralelo. La capacitancia equivalente total viene dada por la suma de las capacitancias:

$$C'_{tot} = C'_{12} + C'_3 = \left( \frac{k_1+2}{k_1+5} \right) C_0 + \left( \frac{4k_2}{1+3k_2} \right) C_0 \quad (2.29)$$

$$C'_{tot} = \left[ \frac{k_1+2}{k_1+5} + \frac{4k_2}{1+3k_2} \right] C_0 \quad (2.30)$$

g) *La carga total final del sistema*

La carga total viene dada por

$$Q'_{tot} = C'_{tot} \Delta V_0 = \left[ \frac{k_1+2}{k_1+5} + \frac{4k_2}{1+3k_2} \right] C_0 \Delta V_0 \quad (2.31)$$

h) *Las cargas finales  $Q_{1,f}$ ,  $Q_{2,f}$  y  $Q_{3,f}$  en cada condensador.*

Los condensadores equivalentes  $C'_{12}$  y  $C'_3$  están conectados en paralelo, por lo tanto, su diferencia de potencial es la misma para ambos y vale  $\Delta V_0$ . Las cargas vienen dadas por

$$Q'_{12} = C'_{12} \Delta V_0 = \left( \frac{k_1+2}{k_1+5} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (2.32)$$

$$Q'_3 = C'_3 \Delta V_0 = \left( \frac{4k_2}{1+3k_2} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (2.33)$$

Dado que los condensadores  $C'_1$  y  $C'_2$  están conectados en serie, la carga de cada uno de ellos es la misma y es igual a la carga  $Q'_{12}$ , es decir,

$$Q'_{1,f} = Q'_{2,f} = \left( \frac{k_1+2}{k_1+5} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (2.34)$$

i) *Las diferencias de potencial final  $\Delta V_{1,f}$  y  $\Delta V_{2,f}$  y  $\Delta V_{3,f}$  a través de cada condensador.*

Ahora que conocemos las capacitancias y las cargas en cada condensador, usando la relación  $\Delta V = \left(\frac{Q}{C}\right)$ , podemos encontrar las diferencias de potencial entre las placas.

$$\Delta V_{1,f} = \frac{Q'_{1,f}}{C'_1} = \frac{\left(\frac{k_1+2}{k_1+5}\right)C_0\Delta V_0}{\frac{1}{3}C_0(k_1+2)} \quad (2.35)$$

$$\Delta V_{1,f} = \left(\frac{3}{k_1+5}\right)\Delta V_0 \quad (2.36)$$

$$\Delta V_{2,f} = \frac{Q'_{2,f}}{C'_2} = \frac{\left(\frac{k_1+2}{k_1+5}\right)C_0\Delta V_0}{C_0} \quad (2.37)$$

$$\Delta V_{2,f} = \left(\frac{k_1+2}{k_1+5}\right)\Delta V_0 \quad (2.38)$$

$$\Delta V_{3,f} = \frac{Q'_{3,f}}{C'_3} = \frac{\left(\frac{4k_2}{1+3k_2}\right)C_0\Delta V_0}{\left(\frac{4k_2}{1+3k_2}\right)C_0} \quad (2.39)$$

$$\Delta V_{3,f} = \Delta V_0 \quad (2.40)$$

Nótese que  $\Delta V_{3,f} = \Delta V_{1,f} + \Delta V_{2,f}$ , ya que se encuentran en paralelo.

$$\Delta V_{3,f} = \left(\frac{3}{k_1+5}\right)\Delta V_0 + \left(\frac{k_1+2}{k_1+5}\right)\Delta V_0 \quad (2.41)$$

$$\Delta V_{3,f} = \Delta V_0 \quad (2.42)$$

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

#### Solucionario

#### Segunda Prueba de Cátedra

#### Electromagnetismo FI-604

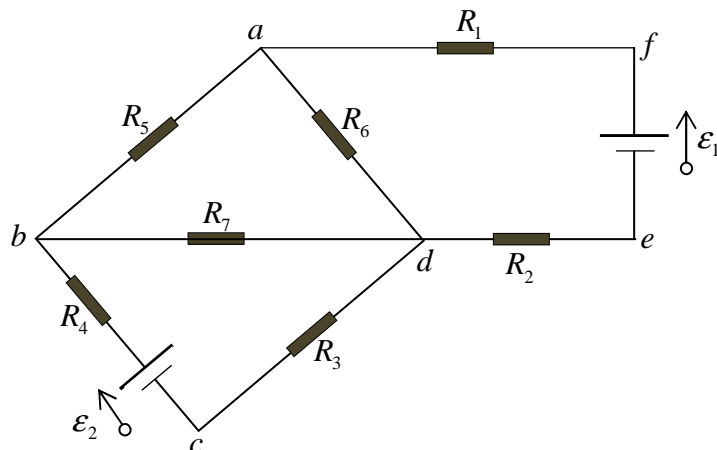
Semestre de Otoño 2012

1.- El circuito de la figura tiene todas las resistencias iguales y valen  $R_j = R = 4(\Omega)$ . Las

Fem valen  $\varepsilon_1 = 13(V)$  y  $\varepsilon_2 = 20(V)$ . Calcule:

a) La corriente eléctrica en cada resistencia.

b) La diferencia de potencial entre los puntos  $b$  y  $e$ , es decir, calcular  $\Delta V_{be} = (V_e - V_b)$ .



#### Solución:

a) Cálculo de la corriente eléctrica en cada resistencia  $R_j$ .

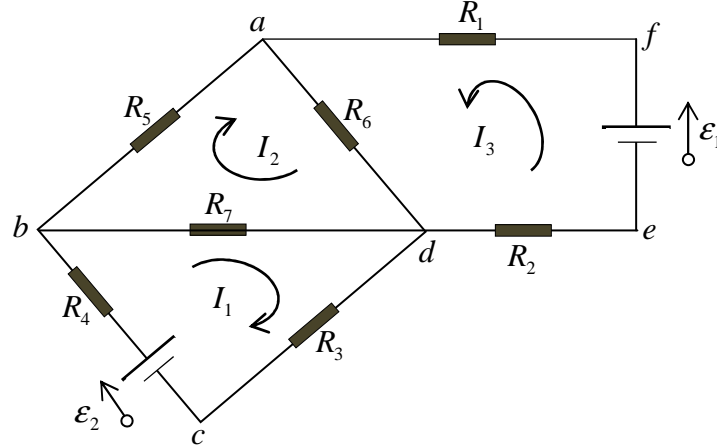
Elegimos método de corriente por malla en la forma que se indica en la figura.

Usando las ecuaciones de Kirchhoff para la suma de las diferencias de potencial en cada malla, se obtienen las siguientes ecuaciones, según la malla indicada y la dirección indicada para recorrerla:

Dado que todas las resistencias son iguales  $R_j = R = 4(\Omega)$ , usaremos sólo el símbolo  $R$  por sencillez.

malla:  $abcda$  :

$$3RI_1 - RI_2 + RI_3 = 0 \quad (43)$$



mallla:  $bcd b$  :

$$3RI_1 - RI_2 - \varepsilon_2 = 0 \quad (44)$$

mallla:  $afeda$  :

$$3RI_3 + RI_2 - \varepsilon_1 = 0 \quad (45)$$

usando el valor de la resistencia y de las Fem, las ecuaciones de malllas, quedan,

$$\begin{aligned} 3I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 3I_1 - I_2 &= \frac{20}{4} \\ 3I_3 + I_2 &= \frac{13}{4} \end{aligned} \quad (46)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene el valor de las corrientes

$$I_1 = \frac{7}{4}(A), \quad I_2 = \frac{1}{4}(A), \quad I_3 = 1(A) \quad (47)$$

Las corrientes  $i_j$  por cada resistencia  $R_j$  valen

$$\begin{aligned} i_1 &= 1(A), \quad i_2 = 1(A), \quad i_3 = \frac{7}{4}(A), \quad i_4 = \frac{7}{4}(A) \\ i_5 &= \frac{1}{4}(A), \quad i_6 = \frac{5}{4}(A), \quad i_7 = \frac{3}{4}(A) \end{aligned} \quad (48)$$

b) Cálculo de la diferencia de potencial  $\Delta V_{be} = (V_e - V_b)$  entre los puntos  $b$  y  $e$ .

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

Para obtener la diferencia de potencial entre los puntos  $b$  y  $e$ , podemos usar cualquier trayectoria que conecte dichos puntos. En este caso usaremos la trayectoria horizontal  $ade$ . Se obtiene

$$V_a + R_7(I_2 - I_1) - R_2 I_3 = V_e \quad (49)$$

despejando, obtenemos  $\Delta V_{be} = (V_e - V_b)$

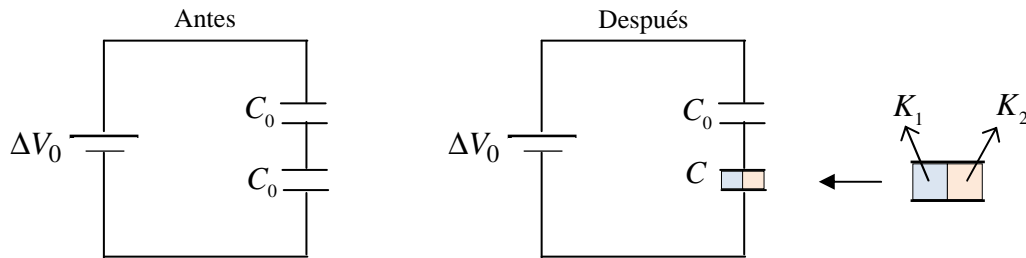
$$V_e - V_a = 4(I_2 - I_1) - 4I_3 \quad (50)$$

Reemplazando los valores numéricos de las corrientes, se tiene

$$V_e - V_a = 4\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{4}\right) - 4 \quad (51)$$

$$\Delta V_{be} = V_e - V_a = -10(V) \quad (52)$$

2.- Se tienen dos condensadores de placas paralelas, idénticos, de capacitancia  $C_0$  cada uno. Ambos condensadores se mantienen conectados en serie a una Fem de valor  $\Delta V_0$ . Luego se introducen dos dieléctricos de constantes dieléctricas  $K_1$  y  $K_2$  en el condensador que se indica, y en la forma que se indica, de modo que cada dieléctrico llena justo la mitad de las placas del condensador.



*Antes de introducir los dieléctricos, calcular:*

- Las cargas iniciales  $Q_{1,i}$  y  $Q_{2,i}$  en cada condensador.
- Las diferencias de potencial  $\Delta V_{1,i}$  y  $\Delta V_{2,i}$  entre las placas de cada condensador.

*Después de introducir los dieléctricos, calcular:*

- c) La capacitancia equivalente del condensador con dieléctrico.
- d) La capacitancia equivalente del sistema
- e) Las cargas finales  $Q_{1,f}$  y  $Q_{2,f}$  en cada condensador.
- f) Las diferencias de potencial final  $\Delta V_{1,f}$  y  $\Delta V_{2,f}$  entre las placas de cada condensador.

**Solución:**

Antes de introducir los dieléctricos.

Cada uno de los condensadores en serie tienen la misma carga  $Q_0$ . La capacitancia equivalente viene dada por

$$\frac{1}{C_{equi}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_0} = \frac{2}{C_0} \quad (53)$$

Luego, la capacitancia equivalente en serie vale

$$C_{serie} = \frac{C_0}{2} \quad (54)$$

Para el circuito equivalente en serie, se cumple que

$$Q_0 = C_{serie} \Delta V_0 \quad (55)$$

donde  $Q_0$  es la carga de cada condensador en serie, luego,

$$Q_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0 \quad (56)$$

Para cada condensador se cumple que

$$\begin{aligned} Q_0 &= C_1 \Delta V_1 \\ Q_0 &= C_2 \Delta V_2 \end{aligned} \quad (57)$$

Despejando, se obtiene las diferencias de potencial entre las placas de los condensadores, considerando que las capacitancias de ambos condensadores son iguales a  $C_0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \frac{Q_0}{C_1} = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{1}{2} \Delta V_0 \\ \Delta V_2 &= \frac{Q_0}{C_2} = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{1}{2} \Delta V_0 \end{aligned} \quad (58)$$

Como se puede ver, para los condensadores iguales conectados en serie, las cargas son iguales y las diferencias de potencial son iguales.

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

*Después de introducir los dieléctricos, calcular:*

En primer lugar, calculemos la capacitancia equivalente del condensador lleno con dos clases de dieléctricos. Este condensador se puede considerar como dos condensadores en paralelo, cuya capacitancia equivalente vale

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (59)$$

donde  $C_1$  es la capacitancia del condensador lleno con dieléctrico  $K_1$  y  $C_2$  es la capacitancia del condensador lleno con dieléctrico  $K_2$ . Cada uno de los condensadores con dieléctrico tiene la misma separación  $d$  que los condensadores originales, pero como los dieléctricos ocupan sólo la mitad del condensador, entonces, el área de cada condensador con dieléctrico es justo  $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$ . Las capacitancias vienen dadas por

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{K_1 \epsilon_0 A_1}{d} = \frac{K_1 \epsilon_0 A}{2d} = \frac{K_1}{2} C_0 \\ C_2 &= \frac{K_2 \epsilon_0 A_2}{d} = \frac{K_2 \epsilon_0 A}{2d} = \frac{K_2}{2} C_0 \end{aligned} \quad (60)$$

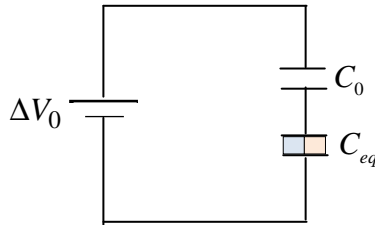
Reemplazando estos valores en la capacitancia equivalente en paralelo (59), se tiene

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{K_1}{2} C_0 + \frac{K_2}{2} C_0 \quad (61)$$

Luego,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \left( \frac{K_1 + K_2}{2} \right) C_0 \quad (62)$$

Ahora tenemos dos condensadores,  $C_0$  y  $C_{eq}$ , conectados en serie.



La capacitancia equivalente de la conexión en serie viene dada por

$$\frac{1}{C_{fin}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_{eq}} \quad (63)$$

reemplazando  $C_{eq}$  dado por (62), tenemos



$$\frac{1}{C_{fin}} = \frac{1}{C_0} + \frac{2}{(K_1 + K_2)C_0} \quad (64)$$

$$C_{fin} = \frac{1}{\frac{1}{C_0} + \frac{2}{(K_1 + K_2)C_0}} = \left( \frac{K_1 + K_2}{2 + K_1 + K_2} \right) C_0 \quad (65)$$

$$C_{fin} = \left( \frac{K_1 + K_2}{2 + K_1 + K_2} \right) C_0 \quad (66)$$

Con esta equivalencia, sólo nos resta la Fem de valor  $\Delta V_0$  y un condensador equivalente final  $C_{fin}$ . En este circuito, la relación entre la carga en el condensador equivalente, la capacitancia y diferencia de potencial viene dada por

$$Q = C_{fin} \Delta V_0 \quad (67)$$

Usando (65), obtenemos la carga  $Q$  en cada uno de los dos condensadores  $C_0$  y  $C_{eq}$  que forman la conexión en serie

$$Q = \left( \frac{K_1 + K_2}{2 + K_1 + K_2} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (68)$$

Pero, de la relación (56), sabemos que  $Q_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0$ , luego (68), queda

$$(69)$$

$$Q = 2 \left( \frac{K_1 + K_2}{2 + K_1 + K_2} \right) Q_0 \quad (70)$$

Nótese que cambió la carga del condensador sin dieléctrico. También podemos ver que si  $K_1 = K_2 = 1$ , es decir, no hay dieléctrico distinto del aire, entonces  $Q = Q_0$ . Con esta carga  $Q$  conocida en (70), escribimos las relaciones a través de cada uno de los condensadores

$$\begin{aligned} Q &= C_0 \Delta V_1 \\ Q &= C_{eq} \Delta V_2 \end{aligned} \quad (71)$$

Dado que la carga  $Q$  y las capacitancias  $C_0$  y  $C_{fin}$  son conocidos, entonces podemos calcular la diferencia de potencial a través de cada condensador,

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_0} = 2 \left( \frac{K_1 + K_2}{2 + K_1 + K_2} \right) \frac{Q_0}{C_0} \quad (72)$$

Pero, de acuerdo a(58), sabe que  $\frac{Q_0}{C_0} = \frac{1}{2} \Delta V_0$ . reemplazando en (72), se obtiene

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

$$\Delta V_1 = \left( \frac{K_1 + K_2}{2 + K_1 + K_2} \right) \Delta V_0 \quad (73)$$

Para  $\Delta V_1$  según (71), se tiene

$$\Delta V_2 = \frac{Q}{C_{eq}} \quad (74)$$

reemplazando  $Q$  de (70) y  $C_{fin}$  de (62), se tiene

$$\Delta V_2 = \frac{Q}{C_{fin}} = 2 \left( \frac{K_1 + K_2}{2 + K_1 + K_2} \right) Q_0 \frac{1}{\left( \frac{K_1 + K_2}{2} \right) C_0} \quad (75)$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{2Q_0}{C_0} \left( \frac{2}{2 + K_1 + K_2} \right) \quad (76)$$

$$\Delta V_2 = \left( \frac{2}{2 + K_1 + K_2} \right) \Delta V_0 \quad (77)$$

Solucionario

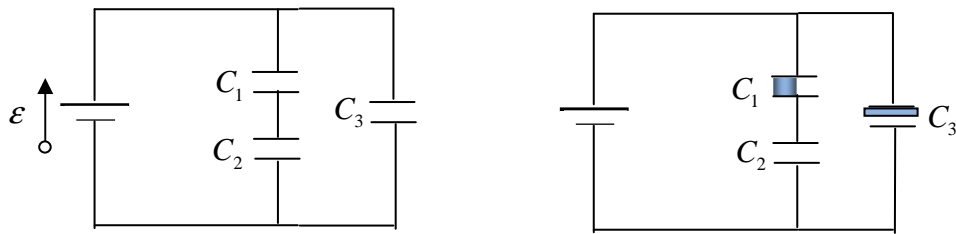
Segunda Prueba de Cátedra

Electromagnetismo FI-604

Semestre de Otoño 2013

1.- Se tienen tres condensadores  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , de placas paralelas e idénticos, con capacitancia  $C_0$  cada uno. La conexión mixta de los tres condensadores se mantiene conectada a una Fem de valor  $\Delta V_0$ , como lo indica la figura adjunta. Luego se introducen dieléctricos de constantes  $k_1$  y  $k_2$  como se indica, y en la forma que se indica, de modo que el dieléctrico de constante  $k_1$  llena justo la mitad del área de las placas del condensador  $C_1$ , y el dieléctrico de constante  $k_2$  llena la mitad de la distancia entre las placas del condensador  $C_3$ .

Nota: Entregue los resultados en función de los datos:  $C_0$ ,  $\Delta V_0$ ,  $k_1$  y  $k_2$ .



*Antes de introducir los dieléctricos, calcular:*

- La capacitancia equivalente del sistema
- La carga total inicial del sistema
- Las cargas iniciales  $Q_{1,i}$  y  $Q_{2,i}$  en cada condensador.

*Después de introducir los dieléctricos, calcular:*

- La capacitancia equivalente de los condensadores con dieléctrico.
- La capacitancia equivalente del sistema
- La carga total final del sistema

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

#### **Solución:**

*Antes de introducir los dieléctricos, calcular:*

a)  $C_1$  y  $C_2$  están en serie, luego su capacitancia equivalente viene dada por,

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_0} = \frac{2}{C_0} \quad (78)$$

luego,

$$C_{12} = \frac{C_0}{2} \quad (79)$$

$C_{12}$  está en paralelo con  $C_3$ , luego su capacitancia equivalente viene dada por

$$C_{eq} = C_{12} + C_3 \quad (80)$$

reemplazando los valores, se tiene

$$C_{eq} = \frac{C_0}{2} + C_0 = \frac{3}{2} C_0 \quad (81)$$

b) Carga total inicial del sistema  $Q_t$

$$Q_t = C_{eq} \Delta V_0 = \frac{3}{2} C_0 \Delta V_0 \quad (82)$$

c) Las cargas iniciales en cada condensador  $Q_{1,i}$ ,  $Q_{2,i}$  y  $Q_{3,i}$ .

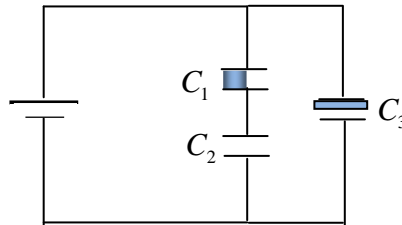
$C_1$  y  $C_2$  están en serie, luego  $Q_{1,i} = Q_{2,i}$ , luego

$$Q_{1,i} = Q_{2,i} = C_{12} \Delta V_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0 \quad (83)$$

$$Q_{3,i} = C_3 \Delta V_0 = C_0 \Delta V_0 \quad (84)$$

*Después de introducir los dieléctricos, calcular:*

d) La capacitancia equivalente de los condensadores con dieléctrico.



El condensador con dieléctrico  $C_1$  está formado por dos condensadores en paralelo, uno con dieléctrico de constante  $k_1$  que ocupa la mitad del área del condensador, y el otro sin dieléctrico que ocupa la otra mitad, luego, la capacitancia equivalente vale

$$C_{1,eq} = C_{1,d} + C_{1,0} \quad (85)$$

donde las capacitancias valen

$$C_{1,d} = \frac{k_1 \epsilon_0}{d} \left( \frac{A}{2} \right) = \frac{k_1}{2} C_0 \quad (86)$$

$$C_{1,0} = \frac{\epsilon_0}{d} \left( \frac{A}{2} \right) = \frac{1}{2} C_0 \quad (87)$$

donde hemos usado  $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ . Reemplazando (86) y (87) en (85), se tiene

$$C_{1,eq} = \frac{k_1}{2} C_0 + \frac{1}{2} C_0 = \left( \frac{k_1 + 1}{2} \right) C_0 \quad (88)$$

El condensador con dieléctrico  $C_3$  está formado por dos condensadores en serie, uno con dieléctrico de constante  $k_2$  y área  $A$ , pero de espesor  $\frac{d}{2}$ , y el otro sin dieléctrico también de espesor  $\frac{d}{2}$ , luego, la capacitancia equivalente vale

$$\frac{1}{C_{3,eq}} = \frac{1}{C_{3,d}} + \frac{1}{C_{3,0}} \quad (89)$$

donde

$$C_{3,d} = \frac{k_2 \epsilon_0 A}{\left( \frac{d}{2} \right)} = 2k_2 C_0 \quad (90)$$

$$C_{3,0} = \frac{\epsilon_0 A}{\left( \frac{d}{2} \right)} = 2C_0 \quad (91)$$

Reemplazando estos resultados en (89), se tiene

$$\frac{1}{C_{3,eq}} = \frac{1}{2k_2 C_0} + \frac{1}{2C_0} = \frac{(1 + k_2)}{2k_2 C_0} \quad (92)$$

invirtiendo, se tiene

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

$$C_{3,eq} = \left( \frac{2k_2}{1+k_2} \right) C_0 \quad (93)$$

e) La capacitancia equivalente del sistema

Para calcular la capacitancia equivalente del sistema necesitamos calcular primero la capacitancia equivalente de la conexión en serie de  $C_{1,eq}$  con  $C_2 = C_0$ .

$$\frac{1}{C_{12,eq}} = \frac{1}{C_{1,eq}} + \frac{1}{C_0} \quad (94)$$

reemplazando (88), se tiene

$$\frac{1}{C_{12,eq}} = \frac{2}{(k_1+1)C_0} + \frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_0} \left( \frac{k_1+3}{k_1+1} \right) \quad (95)$$

invirtiendo

$$C_{12,eq} = \left( \frac{k_1+1}{k_1+3} \right) C_0 \quad (96)$$

Ahora podemos calcular la capacitancia equivalente del sistema,  $C_{eq}$ , de dos condensadores en paralelo:  $C_{12,eq}$  y  $C_{3,eq}$ .

$$C_{eq} = C_{12,eq} + C_{3,eq} \quad (97)$$

reemplazando (96) y (93), se tiene

$$C_{eq} = \left( \frac{k_1+1}{k_1+3} \right) C_0 + \left( \frac{2k_2}{1+k_2} \right) C_0 \quad (98)$$

$$C_{eq} = \left( \frac{(k_1+1)(k_2+1) + 2k_2(k_1+3)}{(k_2+1)(k_1+3)} \right) C_0 \quad (99)$$

f) La carga total final del sistema

Para los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ , las cargas son iguales porque están conectados en serie, es decir,  $Q_{1,f} = Q_{2,f}$

$$Q_{1,f} = Q_{2,f} = C_{12,eq} \Delta V_0 \quad (100)$$

usando  $C_{12,eq}$  de (96), se obtiene

$$Q_{1,f} = Q_{2,f} = \left( \frac{k_1+1}{k_1+3} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (101)$$

Para el condensador  $C_3$ , su carga  $Q_{3,f}$ , viene dada por

$$Q_{3,f} = C_{3,eq} \Delta V_0 \quad (102)$$

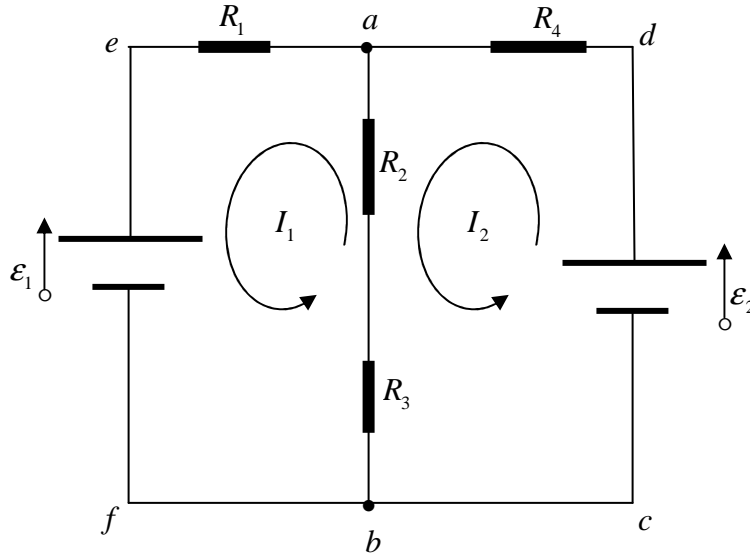
reemplazando (93), se tiene,

$$Q_{3,f} = \left( \frac{2k_2}{1+k_2} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (103)$$

Entonces, la carga total en el sistema viene dada por  $Q_{tot} = C_{eq} \Delta V_0$ ,

$$Q_{tot} = \left( \frac{(k_1+1)(k_2+1) + 2k_2(k_1+3)}{(k_2+1)(k_1+3)} \right) C_0 \Delta V_0 \quad (104)$$

2.- Hallar el valor de las intensidades de corriente en cada resistencia y la diferencia de potencial  $\Delta V_{ab} = V_b - V_a$ , considerando el método de mallas y el sentido de las corrientes que indica el circuito de la figura adjunta. Las resistencias valen,  $R_1 = 3(\Omega)$ ,  $R_2 = 9(\Omega)$ ,  $R_3 = 9(\Omega)$  y  $R_4 = 6(\Omega)$ , y las Fem valen,  $\varepsilon_1 = 8(V)$  y  $\varepsilon_2 = 16(V)$ .



**Solución:**

mallla  $ae fba$  :

$$-21I_1 - 8 + 18I_2 = 0 \quad (105)$$

mallla  $abcd a$

$$-24I_2 + 18I_1 + 16 = 0 \quad (106)$$

### 2.3.1 Unidad III: Solucionario de Pruebas

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen las corrientes

$$I_1 = \frac{8}{15}(A), \quad I_2 = \frac{16}{15}(A) \quad (107)$$

En consecuencia, las corrientes  $i_j$  que circulan por cada resistencia  $R_j$  vienen dadas por

$$i_1 = \frac{8}{15}(A), \quad i_2 = \frac{8}{15}(A), \quad i_3 = \frac{8}{15}(A), \quad i_4 = \frac{16}{15}(A) \quad (108)$$

Cálculo de la diferencia de potencial  $\Delta V_{ab} = V_b - V_a$

Recorriendo un trozo de circuito por cualquier trayectoria desde  $a$  hasta  $b$ , se obtiene la diferencia de potencial pedida. Nosotros usaremos la trayectoria directa  $a \rightarrow b$ ,

$$V_a - i_2 R_2 - i_3 R_3 = V_b \quad (109)$$

reemplazando los datos, se tiene

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = -\frac{8}{15}9 - \frac{8}{15}9 = -\frac{48}{5}(V) \quad (110)$$



### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

---

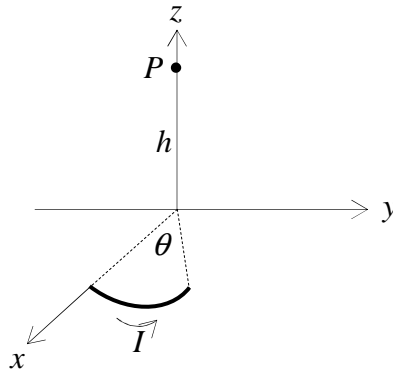
#### Solucionario

Tercera Prueba de Cátedra

Electromagnetismo FI-604

Semestre de Otoño 2011

1. (2.0 ptos.) Considere un trozo de alambre de forma circular de radio  $R$  que subtiende un ángulo  $\theta = (\pi/6)$ . El alambre lleva una corriente constante  $I$  y se encuentra en el plano  $(x, y)$  tal como se muestra en la figura. Calcular el campo magnético resultante en un punto  $P$  a una altura  $h$  sobre el eje  $z$ .



#### Solución:

Consideramos el origen del sistema de referencia justo en el origen del sistema de coordenadas. De este modo, se tiene:

$$\vec{r} = h\hat{k} \quad (1.1)$$

$$\vec{r}' = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j} \quad (1.2)$$

entonces

$$(\vec{r} - \vec{r}') = -R\cos\theta\hat{i} - R\sin\theta\hat{j} + h\hat{k} \quad (1.3)$$

y

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + h^2} \quad (1.4)$$

El elemento diferencial  $d\vec{l}$  que es tangente al alambre en la dirección de la corriente  $I$ , viene dado por  $d\vec{l} = d\vec{r}'$ , es decir,

$$d\vec{l} = d\vec{r}' = -R \sin \theta d\theta \hat{i} + R \cos \theta d\theta \hat{j} \quad (1.5)$$

Ahora podemos calcular  $d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin \theta d\theta & R \cos \theta d\theta & 0 \\ -R \cos \theta & -R \sin \theta & h \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = hR \cos \theta d\theta \hat{i} + hR \sin \theta d\theta \hat{j} + R^2 d\theta \hat{k} \quad (1.7)$$

Ahora podemos calcular el campo magnético en posición  $\vec{r}$ , a saber,

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{hR \cos \theta d\theta \hat{i} + hR \sin \theta d\theta \hat{j} + R^2 d\theta \hat{k}}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \quad (1.8)$$

pero  $(R^2 + h^2)^{3/2}$  es constante, por lo tanto sale fuera de la integral,

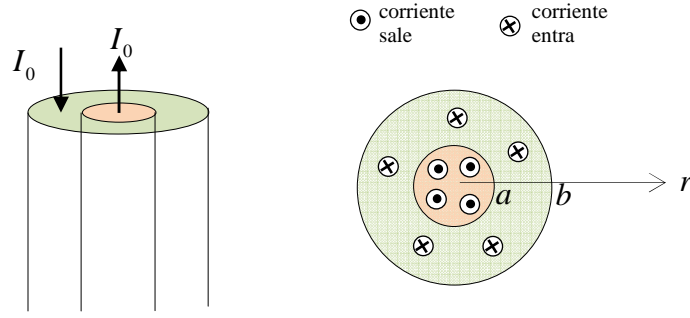
$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} \left\{ hR \int_0^{\pi/6} \cos \theta d\theta \hat{i} + hR \int_0^{\pi/6} \sin \theta d\theta \hat{j} + R^2 \int_0^{\pi/6} d\theta \hat{k} \right\} \quad (1.9)$$

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} \left\{ hR \sin \theta \Big|_0^{\pi/6} \hat{i} - hR \cos \theta \Big|_0^{\pi/6} \hat{j} + R^2 \theta \Big|_0^{\pi/6} \hat{k} \right\} \quad (1.10)$$

Finalmente, el campo magnético  $B(\vec{r})$  viene dado por:

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} \left\{ hR \sin \frac{\pi}{6} \hat{i} + hR \left( 1 - \cos \frac{\pi}{6} \right) \hat{j} + R^2 \frac{\pi}{6} \hat{k} \right\} \quad (1.11)$$

2. Un cable coaxial lleva una corriente  $I_1 = I_0$  hacia arriba, distribuida homogéneamente en un área circular de radio  $a$ . Entre  $r = a$  y  $r = b$  se distribuye homogéneamente una corriente  $I_2 = I_0$  hacia abajo. Calcule el campo magnético en cada una de las tres regiones: i)  $r < a$ , ii)  $a < r < b$ , y iii)  $r > b$ .



**Solución:**

Región I:  $r < a$ , la corriente sube.

La densidad de corriente  $J_1$  es constante y viene dada por  $J_1 = \frac{I_0}{\pi a^2}$ . Apliquemos la ley de Ampere a una circunferencia de radio  $r < a$ , concéntrica con el eje del alambre muy largo.

$$\oint B_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{neta} = \mu_0 \int_0^{r < a} J_1 dA \quad (2.1)$$

$dA$  para una lámina circular viene dada por  $dA = 2\pi r dr$ . Reemplazando en (2.1), se tiene la corriente neta encerrada en la curva Amperiana circular de radio  $r < a$ ,

$$\oint B_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 J_1 \int_0^{r < a} 2\pi r dr = \mu_0 J_1 2\pi \left( \frac{r^2}{2} \right)_0^r \quad (2.2)$$

$$\oint B_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 J_1 \pi r^2 \quad (2.3)$$

En el lado izquierdo de la relación (2.3), se tiene que el campo magnético  $\vec{B}$  es paralelo a  $d\vec{l}$  sobre la curva Amperiana, y además el módulo del campo magnético  $B$  es una constante sobre la curva Amperiana de radio fijo  $r < a$ . En consecuencia, la integral de la izquierda viene dada por

$$\oint B_1 \cdot d\vec{l} = B_1 \oint dl = B_1 (2\pi r) \quad (2.4)$$

Reemplazando este resultado en relación (2.3), se tiene

$$B_1 (2\pi r) = \mu_0 J_1 \pi r^2 \quad (2.5)$$

simplificando, obtenemos

$$B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 J_1 r \quad (2.6)$$

reemplazando el valor de  $J_1$ , se tiene finalmente

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2} r, \quad r < a \quad (2.7)$$

Región II:  $a < r < b$ , la corriente baja.

La densidad de corriente  $J_2$  es constante y viene dada por  $J_2 = \frac{I_0}{\pi(b^2 - a^2)}$ . Apliquemos la

ley de Ampere a una circunferencia de radio  $a < r < b$ , concéntrica con el eje del alambre muy largo. Dado que ahora hay dos corrientes encerradas en la Amperiana, escribimos

$$\oint B_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{neta} = \mu_0 \left\{ \int_0^a J_1 dA + \int_a^{a < r < b} J_2 dA \right\} \quad (2.8)$$

Usando los mismos argumentos de la Región I, y considerando que la densidad  $J_2$  es negativa, ya que al apuntar la corriente hacia abajo, disminuye la corriente neta encerrada, y por lo tanto, debilita el campo magnético. En consecuencia, escribimos

$$B_2 (2\pi r) = \mu_0 J_1 A_1 - \mu_0 J_2 \pi r^2 \Big|_a^{r < b} \quad (2.9)$$

$$B_2 (2\pi r) = \mu_0 J_1 A_1 - \mu_0 J_2 \pi (r^2 - a^2) \quad (2.10)$$

Poniendo los valores de  $J_1$  y  $J_2$

$$B_2 (2\pi r) = \mu_0 \left( \frac{I_0}{\pi a^2} \right) (\pi a^2) - \mu_0 \left( \frac{I_0}{\pi(b^2 - a^2)} \right) \pi (r^2 - a^2) \quad (2.11)$$

$$B_2 (2\pi r) = \mu_0 I_0 - \mu_0 I_0 \left( \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \quad (2.12)$$

Finalmente, el campo magnético en la Región II viene dado por,

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \left( \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} \right) \quad (2.13)$$

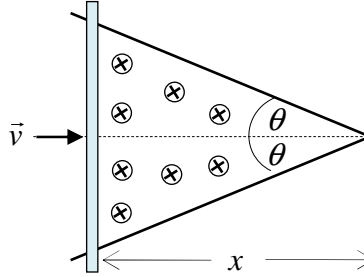
Región III:  $r > b$ , la corriente neta es cero.

Apliquemos la ley de Ampere a una circunferencia de radio  $r > b$ , concéntrica con el eje del alambre muy largo. Dado que ahora la corriente neta encerrada es cero, se tiene,

$$\oint B_3 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{neta} = 0 \quad (2.14)$$

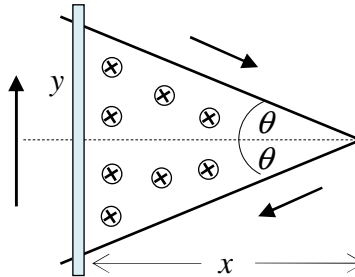
como  $d\vec{l} \neq 0$ , se cumple que  $B_3 = 0$ .

3. Una varilla conductora se mueve con velocidad constante  $v$  hacia la derecha sobre dos varillas conductoras formando una región triangular isósceles que subtiende un ángulo  $2\theta$ , donde existe un campo magnético homogéneo y constante que ingresa en la figura. Calcule el módulo de la Fem inducida  $\mathcal{E}$  y la dirección de la corriente inducida, en el momento en que la distancia de la varilla al vértice del triángulo es justo  $x$ . Debe explicar claramente porqué la corriente inducida va en la dirección que Ud. indique.



**Solución:**

Calculemos primero el flujo magnético a través de la espira triangular en el momento en que la varilla se encuentra a una distancia  $x$  del vértice. Las flechas indican la dirección de la corriente inducida.



Dado que  $\vec{B}$  es constante y lo podemos suponer paralelo a  $d\vec{A}$ , podemos escribir,

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA \quad (3.1)$$

donde  $A$  es el área de la espira triangular. Sea  $y$  la altura de la varilla que está dentro del campo magnético de la región triangular. Entonces, el área de la espira triangular isósceles viene dada por

$$A = \frac{1}{2}(2y)x \quad (3.2)$$

pero en el triángulo rectángulo superior, se tiene que  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ . Entonces, el área en función de  $x$ , queda

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$A = x^2 \tan \theta \quad (3.3)$$

En consecuencia, el flujo magnético, dado por (3.1), a través de la espira triangular queda

$$\phi_m = x^2 (B \tan \theta) \quad (3.4)$$

La ley de Faraday-Lenz queda

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(x^2 B \tan \theta) = -2xB \tan \theta \left(\frac{dx}{dt}\right) \quad (3.5)$$

Pero, la velocidad con que se mueve la varilla hacia la derecha viene dada por  $v = \left(\frac{dx}{dt}\right)$ .

Por lo tanto, la Fem en valor absoluto vale

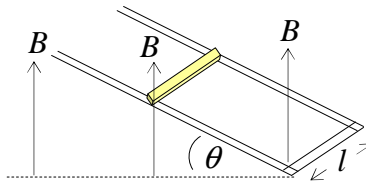
$$\varepsilon = 2xvB \tan \theta \quad (3.6)$$

La dirección de la corriente inducida coincide con el movimiento de los punteros del reloj, para contrarrestar la disminución de flujo hacia adentro de la página, debido a que la varilla se mueve hacia la izquierda.

Tercera Prueba de Cátedra  
Electromagnetismo  
Ingeniería Plan Común  
Semestre de Primavera 2011

1.- Una varilla conductora cuadrada de longitud  $L$ , masa  $m$  y resistencia  $R$ , se desliza sin fricción bajando por dos rieles conductores paralelos de resistencia insignificante. Los rieles están conectados entre sí en su parte inferior mediante un riel de resistencia insignificante, paralelo al alambre, de tal manera que la varilla y los rieles forman una espira rectangular conductora cerrada. El plano de los rieles hace un ángulo  $\theta$  con la horizontal y un campo magnético vertical uniforme  $\vec{B}$  existe en toda la región.

- a) Calcular la fuerza resultante sobre el alambre,
- b) calcular la velocidad constante  $v$  con que bajará la varilla por el plano inclinado.



**Solución:**

Apenas la varilla empieza a moverse con una velocidad instantánea  $\vec{v}$  a lo largo del plano inclinado, aparece una fem inducida  $\mathcal{E}$ , que produce una corriente inducida  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ . La fem  $\mathcal{E}$  se puede calcular de dos formas distintas: a) usando la relación que involucra la variación del flujo magnético,  $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$ , y b) usando la fuerza de Lorentz  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ , sobre una carga dentro de la varilla.

- a) usando la relación  $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

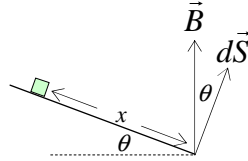
En primer lugar, vemos que el vector diferencial de superficie  $d\vec{S}$  (que es perpendicular al plano de la espira) y el campo magnético  $\vec{B}$  hacen un ángulo  $\theta$  entre sí, luego el flujo magnético queda:

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B dS \cos \theta \quad (1)$$

Dado que  $B$  y  $\theta$  son constantes, se tiene,

$$\phi_B = BS \cos \theta \quad (2)$$

El área instantánea de la espira vale  $S = lx$ , donde  $x$  es la distancia que separa a la varilla de la base de la espira.



Finalmente, el flujo magnético queda

$$\phi_B = (Bl \cos \theta) x \quad (3)$$

Por lo tanto, la fem inducida queda

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\phi_B}{dt} = (Bl \cos \theta) \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

Pero la velocidad instantánea vale  $v = \frac{dx}{dt}$ , luego

$$\mathcal{E} = Blv \cos \theta \quad (5)$$

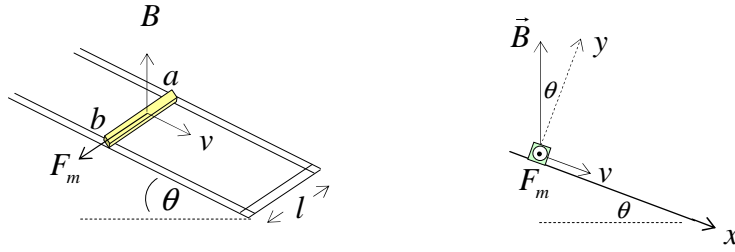
La corriente inducida  $I$  está dirigida en sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj de modo que el flujo magnético inducido se opone a la disminución del flujo hacia arriba,

$$I = \frac{Blv \cos \theta}{R} \quad (6)$$

b) usando la fuerza de Lorentz  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ , sobre una carga dentro del alambre.

Consideremos una carga  $q$  que pertenece a la varilla que se mueve hacia abajo con velocidad instantánea  $v$ , en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$ .





Eligiendo los ejes coordenados como lo indica la figura, la fuerza magnética sobre la carga viene dada por

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB \sin(90 + \theta) \hat{k} \quad (7)$$

Pero  $\sin(90 + \theta) = \cos \theta$ , luego,

$$F_m = qvB \cos \theta \quad (8)$$

Luego la fem inducida en la varilla móvil por viene dada por el trabajo por unidad de carga sobre la carga  $q$ . Si integramos desde  $a$  hasta  $b$ , el  $d\vec{l}$  es paralelo a la fuerza magnética,

$$\mathcal{E} = \int \frac{\vec{F}_m \cdot d\vec{l}}{q} = \int (vB \cos \theta) \hat{k} \cdot (dl) \hat{k} \quad (9)$$

$$\mathcal{E} = Blv \cos \theta \quad (10)$$

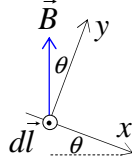
Por lo tanto, la fem inducida  $\mathcal{E}$  apunta desde  $a$  hasta  $b$ , es decir, en la en la dirección contraria al movimiento de los punteros del reloj, y la corriente inducida viene dada por

$$I = \frac{Blv \cos \theta}{R} \quad (11)$$

Estos resultados coinciden completamente con los resultados obtenidos en a).

Ahora que ya conocemos la corriente inducida  $I$ , vemos que el sistema en estudio consiste en una varilla con corriente  $I$  que se mueve en el campo magnético constante y uniforme  $B$ . Por lo tanto aparece una fuerza magnética dada por la relación  $\vec{F}_m = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$ , donde  $d\vec{l} = dl \hat{k}$  apunta en la dirección de la corriente  $I$ . De acuerdo a la figura, el campo magnético viene dado por  $\vec{B} = B(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$ .

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

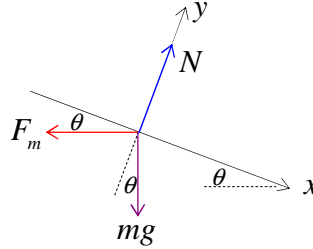


Luego, la fuerza magnética sobre la varilla con corriente vale

$$\vec{F}_m = I \int dl \hat{k} \times B(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \quad (12)$$

$$\vec{F}_m = IlB(-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) \quad (13)$$

La figura muestra todas las fuerzas que actúan sobre la varilla



Donde  $\vec{N} = N\hat{j}$  y  $m\vec{g} = mg(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j})$

Mirando la figura vemos que la fuerza resultante viene dada por:

$$\vec{F}_R = m\vec{g} + \vec{F}_m + \vec{N} \quad (14)$$

Usando componentes,

$$\vec{F}_R = mg(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) + IlB(-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) + N\hat{j} \quad (15)$$

Reordenando, se tiene la fuerza resultante sobre la varilla que se mueve hacia abajo sobre el plano inclinado,

$$\vec{F}_R = (mg \sin \theta - IlB \cos \theta) \hat{i} + (-mg \cos \theta - IlB \sin \theta + N) \hat{j} \quad (16)$$

Dado que no hay movimiento en el eje  $y$ , por la segunda ley de Newton, se anula la componente vertical de la fuerza, esto es,

$$N = mg \cos \theta + IlB \sin \theta \quad (17)$$

Si queremos calcular la velocidad constante  $v$  con la que se moverá la varilla, entonces la fuerza resultante a lo largo del eje  $x$ , también se hace cero, esto es,

$$mg \sin \theta - IlB \cos \theta = 0 \quad (18)$$

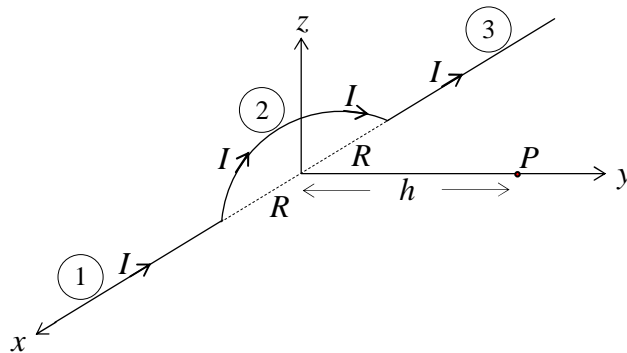
Si reemplazamos el valor de la corriente inducida dada por la relación (11), se tiene

$$mg \sin \theta - \frac{vB^2 l^2 \cos^2 \theta}{R} = 0 \quad (19)$$

Despejando, obtenemos la velocidad,

$$v = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 l^2 \cos^2 \theta} \quad (20)$$

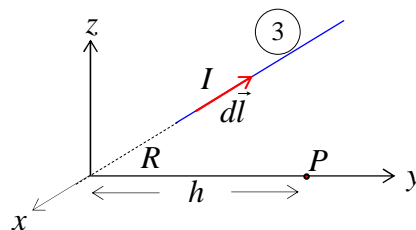
2. a) Hallar el campo magnético  $\vec{B}$  en el punto  $P$ , producido por el alambre que lleva una corriente constante  $I$ . El alambre está formado por dos alambres rectos semi infinitos y una semi circunferencia de radio  $R$ . b) Encuentre el valor del campo magnético  $\vec{B}$  si  $h \rightarrow 0$ .



### Solución:

Hemos marcado cada trozo de alambre con un número. Calcularemos primero el campo magnético producido por los alambres semi infinitos 1 y 3. Por simetría, los campos de cada alambre son los mismos  $\vec{B}_1 = \vec{B}_3$ , así que basta calcular uno sólo de ellos.

Campo producido por el alambre 3.



### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

Considerando el origen del sistema de coordenadas en el medio de la figura, los vectores que definen al problema vienen dados por,

$$d\vec{l} = -dx\hat{i}, \quad \vec{r} = h\hat{j}, \quad \vec{r}' = -x\hat{i} \quad (1)$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = x\hat{i} + h\hat{j}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + h^2} \quad (2)$$

El campo magnético  $\vec{B}_3$ , viene dado por la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3)$$

Reemplazando los valores conocidos en (1) y (2), se tiene,

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{-dx\hat{i} \times (x\hat{i} + h\hat{j})}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \quad (4)$$

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 h I}{4\pi} \int_R^\infty \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (5)$$

Integrando, se tiene

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 h I}{4\pi} \left[ \frac{x}{h^2 \sqrt{x^2 + h^2}} \right]_R^\infty \hat{k} \quad (6)$$

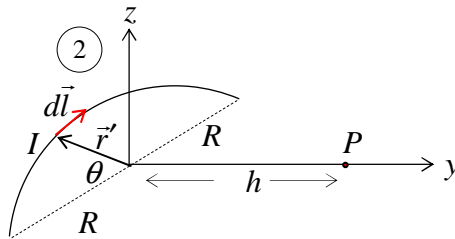
El campo del alambre 3 apunta en dirección negativa del eje  $z$ .

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi h} \left[ 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] \hat{k} \quad (7)$$

Por simetría, se tiene que

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi h} \left[ 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] \hat{k} \quad (8)$$

Campo producido por el alambre semi circular 2.



Los otros vectores que definen al problema vienen dados por,

$$d\vec{l} = dl\hat{e}_T, \quad \vec{r} = h\vec{j}, \quad \vec{r}' = R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{k}) \quad (9)$$

El vector  $d\vec{l} = dl\hat{e}_T$  es tangente al alambre en la dirección de la corriente  $I$ , y se construye a partir del vector  $\vec{r}'$ , usando la matriz de rotación en  $90^\circ$ ,  $R_\perp$ ,

$$R_\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

El vector unitario  $\hat{e}_{r'} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{k}$  que está dirigido en la dirección del vector  $\vec{r}'$ , se escribe en forma matricial:

$$\hat{e}_{r'} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad (11)$$

Cuando  $R_\perp$  actúa sobre el vector unitario  $\hat{e}_{r'}$  en la dirección de  $\vec{r}'$ , lo hace rotar en  $90^\circ$  a la derecha, con lo cual se obtiene un vector perpendicular a  $\vec{r}'$ ,

$$R_\perp \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad (12)$$

Luego el vector unitario tangente al alambre en la dirección de la corriente, viene dado por

$$\hat{e}_T = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{k} \quad (13)$$

De este modo, el vector  $d\vec{l}$  queda

$$d\vec{l} = dl\hat{e}_T = dl(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{k}) \quad (14)$$

*Nota:* el vector unitario tangente  $\hat{e}_T$  también se puede obtener a partir de la diferencial del vector  $\vec{r}'$ , esto es

$$\hat{e}_T = \frac{d\vec{r}'}{|d\vec{r}'|} \quad (15)$$

Tomando la diferencial de  $\vec{r}'$ , se tiene

$$d\vec{r}' = R d\theta (-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{k}) \quad (16)$$

Luego,  $\hat{e}_T$  viene dado por

$$\hat{e}_T = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{k} \quad (17)$$

resultado idéntico al encontrado en (13).

Usando la relación (9), se tiene que

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$(\vec{r} - \vec{r}') = (-R \cos \theta \hat{i} + h \hat{j} - R \sin \theta \hat{k}), \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + h^2} \quad (18)$$

Reemplazando los vectores conocidos en la expresión del campo magnético, se tiene

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(-dl \sin \theta \hat{i} + dl \cos \theta \hat{k}) \times (-R \cos \theta \hat{i} + h \hat{j} - R \sin \theta \hat{k})}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \quad (19)$$

El producto cruz viene dado por

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -dl \sin \theta & 0 & dl \cos \theta \\ -R \cos \theta & h & -R \sin \theta \end{vmatrix} = (-hdl \cos \theta \hat{i} - Rdl \hat{j} - hdl \sin \theta \hat{k}) \quad (20)$$

Insertando este resultado en la relación (19), se escribe,

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \int (-hdl \cos \theta \hat{i} - Rdl \hat{j} - hdl \sin \theta \hat{k}) \quad (21)$$

Realizando cada una de las integrales, usando la relación  $dl = R d\theta$ , nos queda,

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \left[ -hR \int_0^\pi \cos \theta d\theta \hat{i} - R^2 \int_0^\pi d\theta \hat{j} - hR \int_0^\pi \sin \theta d\theta \hat{k} \right] \quad (22)$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} [\pi R^2 \hat{j} + 2hR \hat{k}] \quad (23)$$

En consecuencia, el campo magnético resultante  $\vec{B}_R$ , viene dado por:

$$\vec{B}_R = 2\vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (24)$$

Dado que  $\vec{B}_1 = \vec{B}_3$ , como se indicó en la relación (8). Reemplazando los resultados obtenidos en (7) y (23), se tiene

$$\vec{B}_R = -\frac{\mu_0 I}{2\pi h} \left[ 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] \hat{k} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} [\pi R^2 \hat{j} + 2hR \hat{k}] \quad (25)$$

Para obtener el caso límite  $h \rightarrow 0$ , debemos calcular primero el límite del término

$\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ . Primero reescribamos este término en la forma

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{1}{R} \left( 1 + \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (26)$$

Para  $h$  pequeño, en primera aproximación se cumple que,

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right) \quad (27)$$

Reemplazando este resultado en la relación (25), se tiene

$$\vec{B}_R = -\frac{\mu_0 I}{2\pi h} \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \hat{k} - \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} [\pi R^2 \hat{j} + 2hR \hat{k}] \quad (28)$$

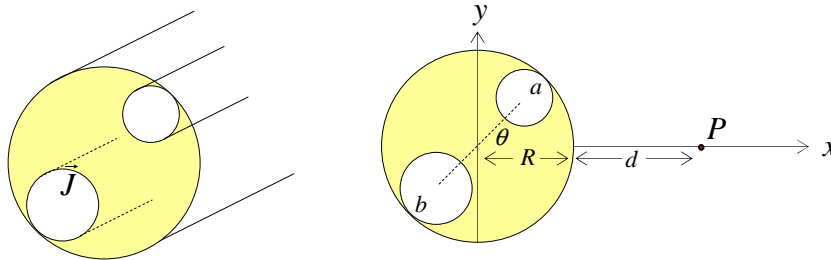
Simplificando,

$$\vec{B}_R = -\frac{\mu_0 I h}{4\pi R^2} \hat{k} - \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} [\pi R^2 \hat{j} + 2hR \hat{k}] \quad (29)$$

Si ahora hacemos tender  $h \rightarrow 0$ , se tiene,

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{j} \quad (30)$$

3.- Un alambre muy largo, de radio  $R$ , posee dos agujeros cilíndricos de radios  $a$  y  $b$  que están ubicados como se muestra en la figura. El alambre tiene una densidad de corriente constante  $\vec{J}$  que sale del plano de la página. Hallar el campo magnético  $\vec{B}$  en el punto  $P$ .



### Solución:

Aplicaremos el principio de superposición para resolver el problema. Por lo tanto, el campo magnético resultante  $\vec{B}_R$  es la suma de los campos magnéticos individuales de tres cilindros, el cilindro grande con densidad de corriente  $\vec{J}$ , y los cilindros de radios  $a$  y  $b$  con densidades  $-\vec{J}$ . Entonces,  $\vec{B}_R$  se escribe

$$\vec{B}_R = \vec{B}_g(\vec{J}) + \vec{B}_a(-\vec{J}) + \vec{B}_b(-\vec{J}) \quad (1)$$

Dado que el punto  $P$  se encuentra fuera de todos los alambres, basta aplicar la ley de Ampere para calcular el campo magnético fuera de un alambre con corriente.

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

Consideremos un alambre con corriente  $I$  y radio  $R_0$  arbitrario. Usando una amperiana de radio  $r$  mayor que  $R_0$ , la ley de Ampere queda,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{neta}} = \mu_0 \int_0^{R_0} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

Dado que  $\vec{J}$  es constante, se tiene para la parte derecha de la relación (2),

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{neta}} = \mu_0 J \pi R_0^2 \quad (3)$$

Sabemos que el campo magnético circula alrededor del alambre con corriente, también sabemos que su magnitud  $B$  es constante mientras circula por la amperiana de radio  $r$ , y además sabemos que en cada punto de la curva amperiana  $\Gamma$  (una circunferencia) el campo magnético es paralelo al vector  $d\vec{l}$  (vector tangente a la circunferencia), por lo tanto, podemos sacar  $B$  fuera de la integral. Luego, la parte derecha de la relación (3), queda

$$B \oint_{\Gamma} dl = \mu_0 J \pi R_0^2 \quad (4)$$

Pero  $\oint_{\Gamma} dl$  es el perímetro de la circunferencia amperiana de radio  $r$ , luego  $\oint_{\Gamma} dl = 2\pi r$ . La relación (4), queda

$$B = \frac{\mu_0 J R_0^2}{2r} \quad (5)$$

Este es el módulo del campo magnético de un alambre con corriente, pero como antes dijimos, su dirección es tangente a una circunferencia de radio  $r$ .

Usando esta expresión general, podemos escribir los módulos de cada uno de los campos producidos por los tres alambres.

*Para el cilindro grande:*

$$B_g = \frac{\mu_0 J R^2}{2r_g} \quad (6)$$

donde  $r_g$  es la distancia medida desde el centro del cilindro grande hasta el punto  $P$ .

*Para cilindro de radio  $a$ :*

$$B_a = \frac{\mu_0 J a^2}{2r_a} \quad (7)$$



donde  $r_a$  es la distancia medida desde el centro del cilindro chico de radio  $a$ , hasta el punto  $P$ .

Para el cilindro de radio  $b$ :

$$B_b = \frac{\mu_0 J b^2}{2r_b} \quad (8)$$

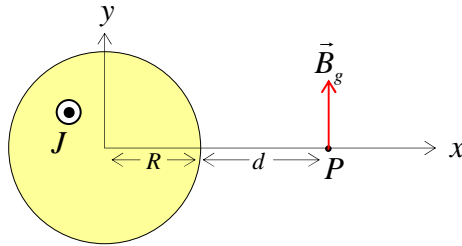
donde  $r_b$  es la distancia medida desde el centro del cilindro chico de radio  $b$ , hasta el punto  $P$ .

Los vectores unitarios en dirección del campo de cada cilindro están determinados por sus densidades de corriente  $\vec{J}$  y  $-\vec{J}$ .

Calculemos ahora las distancias  $r_g$ ,  $r_a$  y  $r_b$ , y los correspondientes vectores unitarios  $\hat{e}_g$ ,  $\hat{e}_a$  y  $\hat{e}_b$ .

Para el cilindro grande:

Dado que la densidad de corriente  $\vec{J}$  sale de la página, el campo magnético  $B_g$  apunta justo en la dirección del vector unitario  $\hat{j}$  en el punto  $P$ .



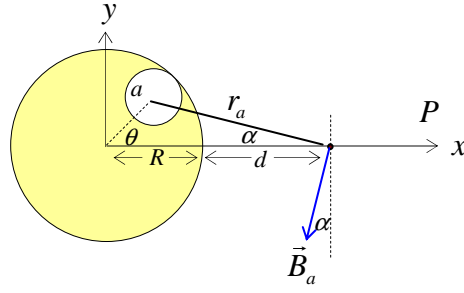
La distancia  $r_g$  vale simplemente,  $r_g = (R + d)$ . Por lo tanto, usando (6), el campo vectorial queda

$$\vec{B}_g = \frac{\mu_0 J R^2}{2(R + d)} \hat{j} \quad (9)$$

Para el cilindro chico de radio  $a$ :

Dado que la densidad de corriente  $\vec{J}$  entra en la página, el campo magnético recorre la circunferencia en sentido contrario al campo producido por el cilindro grande.

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas



Usando el teorema general de Pitágoras,  $r_a$  viene dada por

$$r_a = \sqrt{(R-a)^2 + (R+d)^2 - 2(R-a)(R+d)\cos\theta} \quad (10)$$

El vector unitario en la dirección del campo magnético  $\vec{B}_a$ , viene dado por

$$\hat{e}_a = (-\sin\alpha\hat{i} - \cos\alpha\hat{j}) \quad (11)$$

Donde

$$\sin\alpha = \frac{(R-a)\sin\theta}{r_a}; \quad \cos\alpha = \frac{(R+d) - (R-a)\cos\theta}{r_a} \quad (12)$$

Usando estos resultados y la relación (7), tenemos

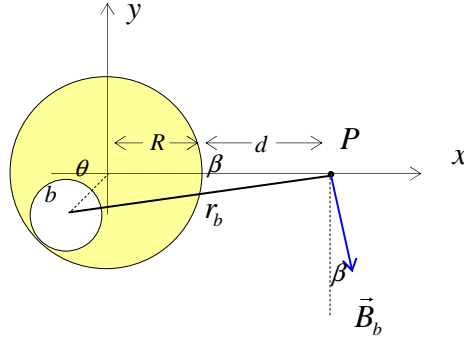
$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 J a^2}{2r_a} \hat{e}_a \quad (13)$$

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 J a^2}{2r_a} (-\sin\alpha\hat{i} - \cos\alpha\hat{j}) \quad (14)$$

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 J a^2}{2r_a^2} \left( -[(R-a)\sin\theta]\hat{i} - [(R+d) - (R-a)\cos\theta]\hat{j} \right) \quad (15)$$

Para el cilindro chico de radio  $b$ :

Dado que la densidad de corriente  $\vec{J}$  entra en la página, el campo magnético recorre la circunferencia en sentido contrario al campo producido por el cilindro grande.



Usando el teorema general de Pitágoras,  $r_b$  viene dada por

$$r_b = \sqrt{(R-b)^2 + (R+d)^2 - 2(R-b)(R+d)\cos(180-\theta)} \quad (16)$$

Pero  $\cos(180-\theta) = -\cos\theta$ , luego,

$$r_b = \sqrt{(R-b)^2 + (R+d)^2 + 2(R-b)(R+d)\cos\theta} \quad (17)$$

El vector unitario en la dirección del campo magnético  $\vec{B}_b$ , viene dado por

$$\hat{e}_b = (\cos\beta\hat{i} - \sin\beta\hat{j}) \quad (18)$$

Donde

$$\sin\beta = \frac{(R-b)\sin\theta}{r_b}; \quad \cos\beta = \frac{(R+d) + (R-b)\cos\theta}{r_b} \quad (19)$$

Usando estos resultados y la relación (8), tenemos

$$\vec{B}_b = \frac{\mu_0 J b^2}{2r_b} \hat{e}_b \quad (20)$$

$$\vec{B}_b = \frac{\mu_0 J b^2}{2r_b} (\cos\beta\hat{i} - \sin\beta\hat{j}) \quad (21)$$

$$\vec{B}_b = \frac{\mu_0 J b^2}{2r_b^2} ([ (R-b)\sin\theta ] \hat{i} - [ (R+d) + (R-b)\cos\theta ] \hat{j}) \quad (22)$$

Usando los resultados (9), (15) y (22), se tiene el campo magnético resultante en el punto  $P$ ,

$$\vec{B}_R = \vec{B}_g + \vec{B}_a + \vec{B}_b \quad (23)$$

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$\begin{aligned}\bar{B}_R = & \left[ \frac{\mu_0 J b^2}{2r_b^2} (R-b) \sin \theta - \frac{\mu_0 J a^2}{2r_a^2} (R-a) \sin \theta \right] \hat{i} + \\ & + \left[ \frac{\mu_0 J R^2}{2(R+d)} - \frac{\mu_0 J a^2}{2r_a^2} ((R+d) - (R-a) \cos \theta) - \frac{\mu_0 J b^2}{2r_b^2} ((R+d) + (R-b) \cos \theta) \right] \hat{j}\end{aligned}\quad (24)$$

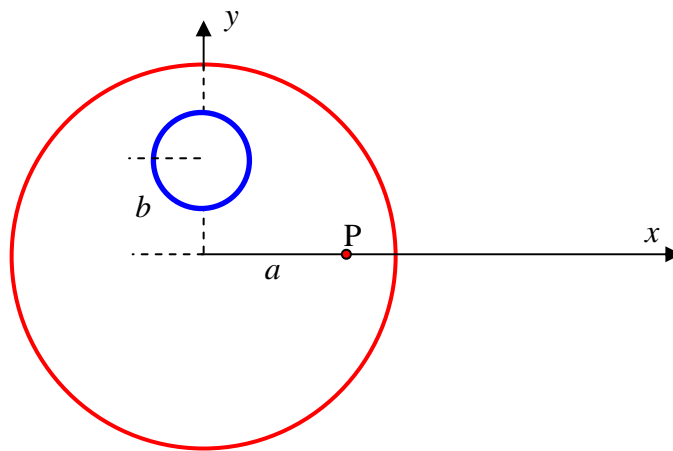
Solucionario

Prueba Optativa de Electromagnetismo

Ingeniería Plan Común

Semestre de Otoño 2012

1.- Una esfera de radio  $R$  tiene una densidad de carga  $\rho$  uniforme y simétrica. La esfera tiene un agujero esférico de radio  $\frac{R}{5}$ , cuyo centro está a una distancia vertical  $b$  justo sobre el centro de la esfera grande. Hallar el campo eléctrico en el punto P a una distancia  $a$  del centro de la esfera grande.



**Solución:**

El campo resultante se obtiene por el principio de superposición, es decir, consideramos que el campo total  $\vec{E}_R$  es la suma del campo  $\vec{E}_g$  creado por la esfera grande con densidad de carga  $\rho$  y el campo  $\vec{E}_{ch}$  creado por la esfera chica, considerando que su densidad de carga es  $-\rho$ , es decir,

$$\vec{E}_R = \vec{E}_g + \vec{E}_{ch}.$$

El punto  $P$  se encuentra ubicado en el interior de la esfera grande y en el exterior de la esfera chica.

El campo eléctrico se calcula usando ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$$

Cálculo del campo en el interior de la esfera grande:

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0}$$

Finalmente la magnitud del campo en el interior de la esfera grande viene dada por:

$$E_g = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Vectorialmente, el campo en el punto  $r = a$  vale:

$$\vec{E}_g = \frac{\rho a}{3\epsilon_0} \hat{i}$$

Cálculo del campo en el exterior de la esfera chica de radio  $\frac{R}{5}$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \rho \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \left(\frac{R}{5}\right)^3$$

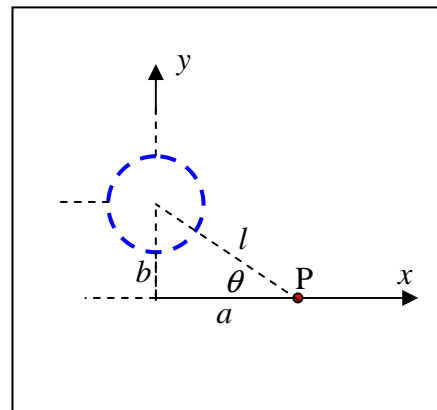
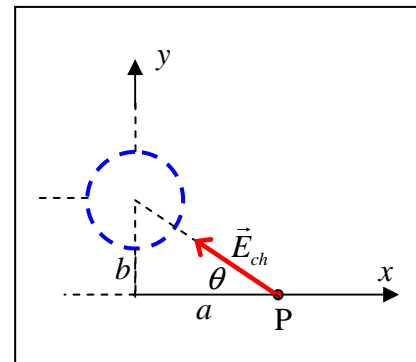
$$E 4\pi r^2 = \rho \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \left(\frac{R}{5}\right)^3$$

Finalmente, el módulo del campo en el exterior de la esfera chica, viene dado por:

$$E_{ch} = \frac{\rho R^3}{3 \times 125 \epsilon_0 r^2}$$

El campo  $\vec{E}_{ch}$  es un vector que apunta desde  $P$  hasta el centro de la esfera chica, porque se considera el agujero como una esfera con densidad de carga negativa.

La distancia radial es  $r = l = \sqrt{a^2 + b^2}$ , por lo tanto, el módulo del campo eléctrico de la esfera chica es:



$$E_{ch} = \frac{\rho R^3}{3 \times 125 \epsilon_0 l^2} = \frac{\rho R^3}{3 \times 125 \epsilon_0 (a^2 + b^2)}$$

Vectorialmente, el campo  $\vec{E}_{ch}$  viene expresado en función del ángulo  $\theta$ , en la forma:

$$\vec{E}_{ch} = -E_{ch} \cos \theta \hat{i} + E_{ch} \sin \theta \hat{j}$$

donde

$$\cos \theta = \frac{a}{l} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \theta = \frac{b}{l} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Explícitamente:

$$\vec{E}_{ch} = E_{ch} \left( -\frac{a}{l} \hat{i} + \frac{b}{l} \hat{j} \right) = \frac{\rho R^3}{3 \times 125 \epsilon_0 l^2} \left( -\frac{a}{l} \hat{i} + \frac{b}{l} \hat{j} \right)$$

$$\vec{E}_{ch} = \frac{\rho R^3}{3 \times 125 \epsilon_0 l^3} (-a \hat{i} + b \hat{j}) = \frac{\rho R^3}{3 \times 125 \epsilon_0 (a^2 + b^2)^{3/2}} (-a \hat{i} + b \hat{j})$$

$$\boxed{\vec{E}_{ch} = \frac{\rho R^3}{3 \times 125 \epsilon_0 (a^2 + b^2)^{3/2}} (-a \hat{i} + b \hat{j})}$$

Sumando los campos, usando el principio de superposición, obtenemos el campo eléctrico

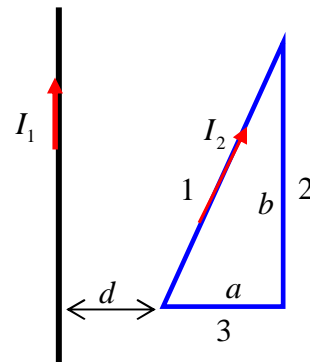
resultante  $\vec{E}_R = \vec{E}_g + \vec{E}_{ch}$

$$\vec{E}_R = \frac{\rho a}{3 \epsilon_0} \hat{i} + \frac{\rho R^3}{3 \times 125 \epsilon_0 (a^2 + b^2)^{3/2}} (-a \hat{i} + b \hat{j})$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{E}_R = \frac{\rho a}{3 \epsilon_0} \left( 1 - \frac{R^3}{125 (a^2 + b^2)^{3/2}} \right) \hat{i} + \frac{\rho b}{3 \epsilon_0} \frac{R^3}{125 (a^2 + b^2)^{3/2}} \hat{j}}$$

2.- Un alambre infinitamente largo lleva una corriente constante  $I_1$ . Este alambre se ubica en el plano de una espira triangular, la cual conduce una corriente  $I_2$ , tal como se muestra en la figura. Determine la magnitud y dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético creado por el alambre largo.



### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

Calcularemos la fuerza vectorial sobre cada trozo del alambre, los cuales están numerados del 1 al 3 como se indica en la figura.

#### Solución:

El campo magnético del alambre largo viene dado por la ley de Ampere:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\hat{k})$$

La fuerza sobre un alambre con corriente viene dada por:  $\vec{F} = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$

Fuerza  $\vec{F}_1$  sobre el alambre diagonal

En este caso,  $d\vec{l}_2 = dx \hat{i} + dy \hat{j}$ , por lo tanto,

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = (dx \hat{i} + dy \hat{j}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\hat{k})$$

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} [dx (\hat{i} \times \hat{k}) + dy (\hat{j} \times \hat{k})]$$

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left[ \frac{dy}{x} \hat{i} - \frac{dx}{x} \hat{j} \right]$$

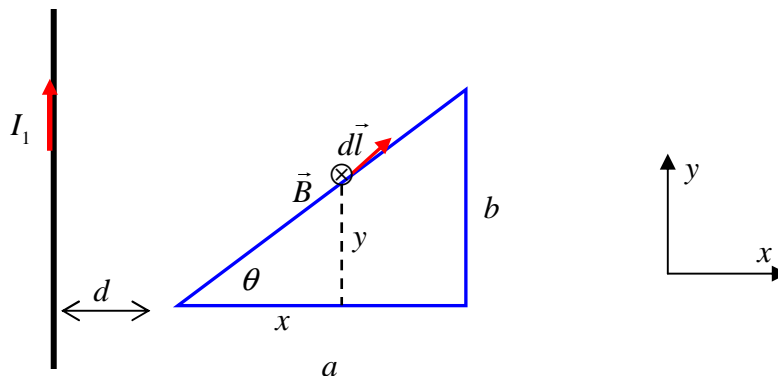
La fuerza viene dada por:

$$\vec{F}_1 = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int \left[ \frac{dy}{x} \hat{i} - \frac{dx}{x} \hat{j} \right]$$

Pero las variables  $x$  e  $y$  no son independientes sobre la diagonal, sino que cumplen con la relación:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

como se puede ver en la figura





Por lo tanto,  $dy = \frac{b}{a} dx$

Reemplazando en la integral, se tiene:

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int \left[ \frac{b dx}{ax} \hat{i} - \frac{dx}{x} \hat{j} \right] = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \int \left[ \frac{b dx}{x} \hat{i} - \frac{dx}{x} \hat{j} \right]$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} (b \hat{i} - a \hat{j}) \int_d^{d+a} \frac{dx}{x}$$

finalmente:

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} (b \hat{i} - a \hat{j}) \ln \left( \frac{d+a}{d} \right)}$$

Fuerza  $\vec{F}_2$  sobre el alambre vertical

En este caso,  $d\vec{l}_2 = -dy \hat{j}$ , y el campo magnético debe ser evaluado en  $x = d + a$

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = (-dy \hat{j}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} (-\hat{k}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} dy \hat{i}$$

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} dy \hat{i}$$

La fuerza viene dada por:

$$\vec{F}_2 = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} \int_0^b dy \hat{i} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d+a)} \hat{i}$$

Obteniéndose una fuerza hacia la derecha:

$$\boxed{\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d+a)} \hat{i}}$$

Fuerza  $\vec{F}_3$  sobre el alambre horizontal

En este caso,  $d\vec{l}_2 = -dx \hat{i}$ , y el campo magnético es variable:

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = (-dx \hat{i}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\hat{k}) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{dx}{x} \hat{j}$$

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{dx}{x} \hat{j}$$

La fuerza viene dada por:

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$\vec{F}_3 = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} \hat{j}$$

Obteniéndose una fuerza de hacia abajo:

$$\boxed{\vec{F}_3 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \hat{j}}$$

La fuerza resultante  $\vec{F}_R$  sobre la espira triangular con corriente viene dada por:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

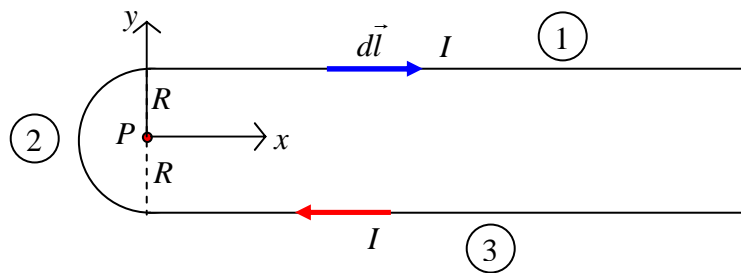
$$\vec{F}_R = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} (-b\hat{i} + a\hat{j}) \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) + \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d+a)} \hat{i} - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \hat{j}$$

$$\vec{F}_R = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left[ \frac{1}{(d+a)} - \frac{1}{a} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \right] \hat{i} + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[ \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) - \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \right] \hat{j}$$

Este resultado muestra que se anula la componente vertical de la fuerza, por lo tanto, la fuerza resultante sólo actúa en dirección horizontal:

$$\boxed{\vec{F}_R = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left[ \frac{1}{(d+a)} - \frac{1}{a} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \right] \hat{i}}$$

3.- Hallar el campo magnético en el punto  $P$  para la distribución de corriente formada por dos alambres semi-infinitos y un alambre semicircular que se muestra en la figura:



**Solución:**

Consideremos un sistema de referencia con origen en el punto  $P$  como se muestra en la figura, donde el eje  $z$  sale de la página. El problema puede ser separado en tres partes como se muestra en la figura. Por la simetría del problema, la contribución de los alambres semi-infinitos es la misma, por ello sólo calcularemos el alambre 1 y consideraremos que

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_3 \text{ y el campo resultante vendrá dado por: } \vec{B}_R = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = 2\vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Aplicaremos la ley de Biot-Savart para calcular el campo magnético en cada sección del alambre

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Cálculo de  $\vec{B}_1$

En este caso los vectores son:

$$\vec{r} = \vec{0}, \quad \vec{r}' = x\hat{i} + R\hat{j}, \quad d\vec{l} = d\vec{r}' = dx\hat{i}$$

Por lo tanto:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -x\hat{i} - R\hat{j} \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (x^2 + R^2)^{3/2}$$

y

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = dx\hat{i} \times (-x\hat{i} - R\hat{j}) = Rdx(-\hat{k})$$

Reemplazando en la ley de Biot-Savart, tenemos:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{-Rdx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$\vec{B}_1 = -\hat{k} \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{1}{R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_0^\infty$$

$$\boxed{\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \hat{k}}$$

Cálculo de  $\vec{B}_2$

Mirando la figura adjunta, vemos que en este caso los vectores son:

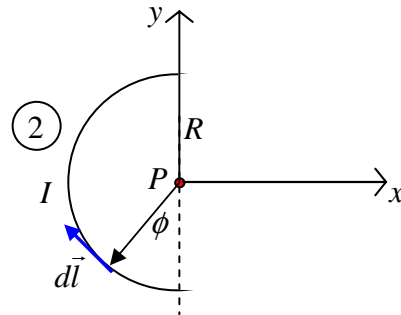
$$\vec{r} = \vec{0}, \quad \vec{r}' = -R \sin \phi \hat{i} - R \cos \phi \hat{j}$$

$$d\vec{l} = d\vec{r}' = -R \cos \phi d\phi \hat{i} + R \sin \phi d\phi \hat{j}$$

Por lo tanto:

$$\vec{r} - \vec{r}' = R \sin \phi \hat{i} + R \cos \phi \hat{j}; \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = R^3$$

y



### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = (-R \cos \phi d\phi \hat{i} + R \sin \phi d\phi \hat{j}) \times (R \sin \phi \hat{i} + R \cos \phi \hat{j})$$

desarrollando el producto cruz por medio del determinante, tenemos

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \cos \phi d\phi & R \sin \phi d\phi & 0 \\ R \sin \phi & R \cos \phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = -R^2 d\phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \hat{k}$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = -R^2 d\phi \hat{k}$$

Reemplazando en la ley de Biot-Savart, tenemos:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \frac{-R^2 d\phi}{R^3} \hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi d\phi \hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k}}$$

El campo magnético resultante en el punto  $P$  está dado por

$$\vec{B}_R = 2\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{2\mu_0 I}{4\pi R} \hat{k} - \frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \left( \frac{2}{\pi} + 1 \right) \hat{k}$$

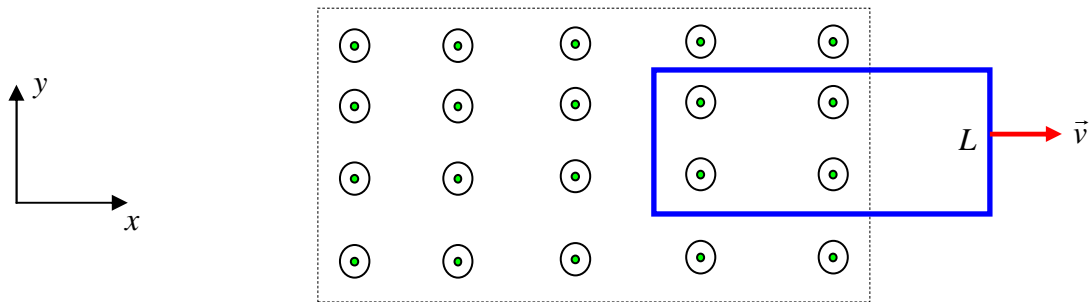
$$\boxed{\vec{B}_R = \frac{\mu_0 I}{4R} \left( \frac{2}{\pi} + 1 \right) (-\hat{k})}$$

Tercera Prueba de Electromagnetismo

Ingeniería Plan Común

Semestre de Otoño 2013

1.- Una espira rectangular se mueve con velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$  constante saliendo de una región de campo magnético  $\vec{B} = B\hat{k}$  constante que sale de la página y que está homogéneamente distribuido en una región rectangular que se indica con línea punteada. Hallar la magnitud de la Fem  $\mathcal{E}$  inducida en la espira rectangular e indique en que dirección se mueve la corriente inducida.



**Solución:**

Se mostrará la solución usando los dos métodos siguientes:

Método a) se calcula la Fem usando la ley de Faraday-Lenz  $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$

Método b) usando la definición de Fem:  $\mathcal{E} = \int \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l}$

Método a) se calcula la Fem usando la ley de Faraday-Lenz

Calculemos el flujo magnético  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$  a través del sector de la espira que se encuentra dentro de la región con campo magnético. Como  $\vec{B}$  y  $d\vec{A}$  son paralelos y además  $B$  es constante el flujo queda:

$$\phi_m = BA.$$

Llamemos  $x$  a la sección horizontal de la espira que aún está dentro de la región con campo magnético. Entonces  $A = Lx$ , es decir, el flujo magnético viene dado por:

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$\phi_m = BLx$$

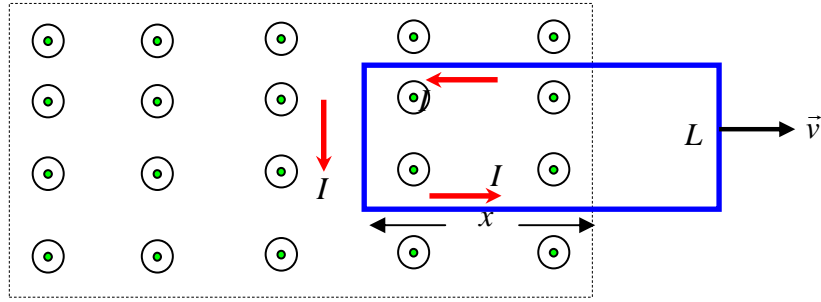
La Fem inducida, en valor absoluto, queda entonces:

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(BLx)}{dt} = BL \frac{dx}{dt}$$

y dado que  $v = \frac{dx}{dt}$ , se obtiene la Fem

$$\boxed{\mathcal{E} = BLv}$$

El sentido de giro de la corriente inducida  $I$  en la espira es tal, que produce un campo magnético inducido que se opone al cambio del flujo.



Cuando la espira está saliendo de la región con campo magnético, está disminuyendo el número de líneas de campo magnético que la cruzan la espira saliendo fuera de la página, por ello, se genera una corriente inducida contraria al movimiento de los punteros del reloj que genera campo magnético que sale hacia fuera de la espira, como se indica en la figura.

Método b) usando la definición de Fem:  $\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Consideremos solamente el trozo vertical de la espira que se encuentra dentro de la región con campo magnético moviéndose hacia la derecha con velocidad  $\vec{v}$  como si estuviera aislado del resto de la espira.

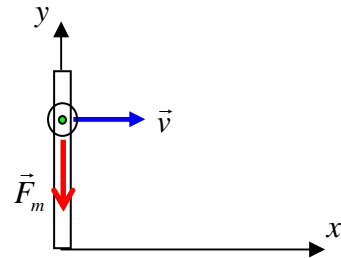
Sobre cada portador de carga positivo de esta varilla actúa una fuerza magnética dada por:  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Dado que

$\vec{v} = v\hat{i}$  y que  $\vec{B} = B\hat{k}$ , el producto cruz vale

$$\vec{v} \times \vec{B} = v\hat{i} \times B\hat{k} = vB(-\hat{j}),$$

es decir, la fuerza magnética sobre la carga  $q$  apunta hacia abajo:

$$\boxed{\vec{F}_m = -qvB\hat{j}}$$



La fuerza magnética actuando sobre cada portador de carga produce una acumulación de carga positiva en la parte inferior de la varilla y una acumulación de carga negativa en la parte superior de ella. Esto genera un campo eléctrico  $\vec{E}$  que produce una fuerza eléctrica que se opone a la fuerza magnética. En el equilibrio dichas fuerzas opuestas se anulan, es decir,  $q\vec{E} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , y cesa el movimiento de carga de un extremo a otro. Recuerde que estamos considerando como si este trozo de varilla estuviera aislado del resto de la espira.

Cuando esto ocurre, podemos calcular la Fem  $\mathcal{E}$  que se produce mediante la definición:

$\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , donde  $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} = -vB\hat{j}$  y  $d\vec{l} = dy\hat{j}$ . Haciendo la integración a lo largo del alambre, desde  $y=0$  hasta  $y=L$ , y dado que  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  son antiparalelos, la Fem en valor absoluto vale:

$$\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^L vB dy$$

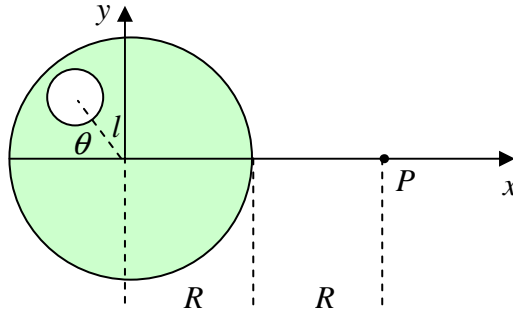
$$\boxed{\mathcal{E} = vBL}$$

Resultado idéntico al obtenido por el método a).

El sentido de la Fem  $\mathcal{E}$  es el mismo que el sentido de la fuerza magnética  $\vec{F}_m$  sobre los portadores de carga positivos. Esto significa que si conectamos este trozo vertical de alambre al resto de la espira, la corriente inducida  $I$  circula hacia abajo, es decir, en sentido contrario a los punteros del reloj, tal como vimos en el método anterior.

2.- Hallar el vector campo magnético  $\vec{B}$  en el punto  $P$ , creado por un alambre muy largo de radio  $R$  que lleva una densidad de corriente  $J = cte$  que sale de la página. Dicho alambre tiene un agujero cilíndrico muy largo de radio  $a$  en la posición que se indica en la figura a través de la distancia  $l$  y el ángulo  $\theta$

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas



#### Solución:

Este problema puede ser resuelto usando el principio de superposición, es decir, el campo magnético resultante  $\vec{B}_R$  en el punto  $P$  viene dado por la superposición del campo producido por el alambre grande  $\vec{B}_g(J)$ , que es función de la densidad de corriente  $J$ , y del campo magnético producido por el agujero cilíndrico  $\vec{B}_{ch}(-J)$  como si fuera un alambre con densidad de corriente contraria a la densidad de corriente del alambre grande, es decir,

$$\vec{B}_R = \vec{B}_g(J) + \vec{B}_{ch}(-J)$$

Como el punto  $P$  de observación del campo está fuera del alambre con corriente y fuera del agujero cilíndrico, entonces usando la ley de Ampere podemos calcular el campo magnético a una distancia  $r$  del centro de cada alambre.

Apliquemos la ley de Ampere a un alambre muy largo:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{NETA}$$

Dado que  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  son paralelos a lo largo de la curva Amperiana  $\Gamma$ , y dado que sobre la Amperiana de radio  $r$  fijo no varía el módulo del campo magnético, podemos escribir:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 I_{NETA}$$

Por lo tanto, el campo magnético fuera del alambre muy largo con corriente  $I_{NETA}$  viene dado por:

$$B = \frac{\mu_0 I_{NETA}}{2\pi r}$$

Este mismo resultado lo aplicaremos al alambre con corriente de radio  $R$  y al agujero cilíndrico de radio  $a$ .



Campo magnético creado por cilindro grande.

$$\vec{B}_g = \frac{\mu_0 I_{NETA}}{2\pi r_g} \hat{e}_g$$

donde  $r_g = 2R$  y donde  $\hat{e}_g$  es un vector unitario en la dirección del campo magnético creado por el alambre grande en el punto  $P$ . En este caso, dado que la corriente sale del cilindro grande, el vector unitario apunta justo hacia arriba en el eje  $y$ , es decir,  $\hat{e}_g = \hat{j}$ . La corriente neta viene dada por  $I_g = \int J dA = JA = J\pi R^2$ , por lo tanto, el campo creado por el cilindro grande viene dado por:

$$\vec{B}_g = \frac{\mu_0 J \pi R^2}{2\pi 2R} \hat{j}$$

$$\boxed{\vec{B}_g = \frac{\mu_0 J R}{4} \hat{j}}$$

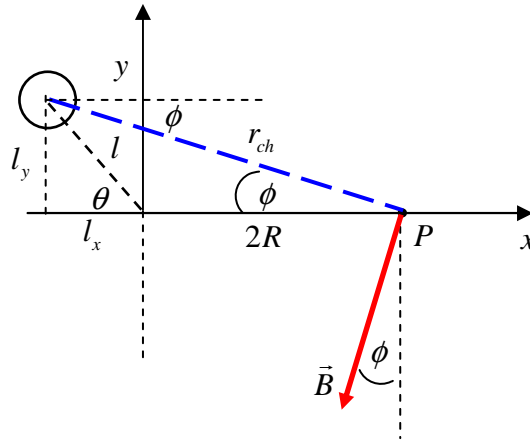
Campo magnético creado por el agujero cilíndrico de radio  $a$

$$\vec{B}_{ch} = \frac{\mu_0 I_{NETA}}{2\pi r_{ch}} \hat{e}_{ch}$$

Donde  $I_{NETA} = \int J dA = J\pi a^2$  y  $\hat{e}_{ch}$  es un vector unitario en la dirección que apunta el campo magnético considerando que la corriente entra en la página. De la geometría que se muestra en la figura se obtiene  $r_{ch}$  como

$$\boxed{r_{ch} = \sqrt{(2R + l_x)^2 + l_y^2}}$$

donde  $l_x = l \cos \theta$  y  $l_y = l \sin \theta$ .



### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

El campo magnético producido por el agujero cilíndrico que lleva una corriente que entra en la página (porque estamos considerando que la densidad de corriente es negativa), apunta hacia abajo como lo muestra la figura. Allí se ve que el vector campo magnético se desvía de la vertical hacia abajo justo en el ángulo  $\phi$ . A partir de esa información podemos obtener el vector unitario  $\hat{e}_{ch}$  en la siguiente forma:

$$\hat{e}_{ch} = -\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j}$$

Nota: También podemos obtener el vector unitario en la siguiente forma alternativa.

Consideremos un sistema de referencia justo en el centro del agujero cilíndrico. Entonces el vector  $\vec{r}_{ch}$  se escribe

$$\vec{r}_{ch} = r_{ch} (\cos \phi \hat{i} - \sin \phi \hat{j})$$

La diferencial de este vector es un vector tangente a la curva

$$d\vec{r}_{ch} = r_{ch} (-\sin \phi d\phi \hat{i} - \cos \phi d\phi \hat{j})$$

El vector unitario  $\hat{e}_{ch}$  tangente a la curva, en el sentido de crecimiento del ángulo  $\phi$ , puede ser obtenido simplemente como

$$\frac{d\vec{r}_{ch}}{|d\vec{r}_{ch}|} = \hat{e}_{ch} = -\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j}$$

$$\hat{e}_{ch} = -\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j}$$

Resultado idéntico al anterior.

Con todos los datos anteriores podemos escribir el campo magnético creado por el agujero cilíndrico:

$$\vec{B}_{ch} = \frac{\mu_0 I_{NETA}}{2\pi r_{ch}} \hat{e}_{ch}$$

$$\vec{B}_{ch} = \frac{\mu_0 I_{NETA}}{2\pi \sqrt{(2R + l_x)^2 + l_y^2}} (-\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j})$$

Donde

$$\sin \phi = \frac{l_y}{\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}}$$

$$\cos \phi = \frac{(2R+l_x)}{\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}}$$

Pero la corriente vale:  $I_{NETA} = J\pi a^2$ , luego

$$\vec{B}_{ch} = \frac{\mu_0 J a^2}{2\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}} (-\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j})$$

Reemplazando los valores encontrados de  $\vec{B}_g$  y  $\vec{B}_{ch}$  en la relación

$$\vec{B}_R = \vec{B}_g(J) + \vec{B}_{ch}(-J)$$

se tiene:

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0 J R}{4} \hat{j} + \frac{\mu_0 J a^2}{2\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}} (-\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j})$$

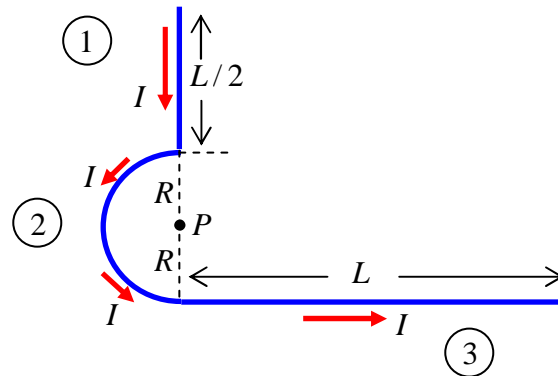
Reordenando, tenemos finalmente:

$$\vec{B}_R = \left\{ -\frac{\mu_0 J a^2 \sin \phi}{2\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}} \right\} \hat{i} + \left\{ \frac{\mu_0 J R}{4} - \frac{\mu_0 J a^2 \cos \phi}{2\sqrt{(2R+l_x)^2 + l_y^2}} \right\} \hat{j}$$

reemplazando los valores de  $\sin \phi$  y  $\cos \phi$

$$\vec{B}_R = \left\{ -\frac{\mu_0 J a^2 l_y}{2((2R+l_x)^2 + l_y^2)} \right\} \hat{i} + \left\{ \frac{\mu_0 J R}{4} - \frac{\mu_0 J a^2 (2R+l_x)}{2((2R+l_x)^2 + l_y^2)} \right\} \hat{j}$$

3.- Calcular el campo magnético  $\vec{B}$  (en magnitud y dirección) en el punto  $P$  creado por un alambre vertical de largo  $L/2$ , un alambre horizontal de largo  $L$  y una semicircunferencia de radio  $R$ , que llevan una corriente constante  $I$  como se muestra en la figura.



### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

#### Solución:

El campo magnético en el punto  $P$  es la suma de los campos magnéticos creados por el alambre vertical de largo  $L/2$  (rotulado 1), más el alambre semi circunferencial de radio  $R$  (rotulado 2), más el alambre horizontal de largo  $L$  (rotulado 3)

$$\vec{B}_R = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

Campo creado por un alambre finito.

Consideremos que el origen del sistema de referencia está justo en el punto  $P$ .

Para el alambre 1, se tiene

$$\vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{r}' = y\hat{j}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -y\hat{j}$$

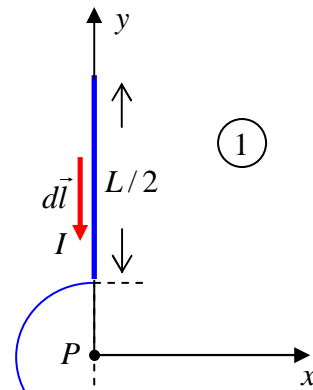
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = y$$

$$d\vec{l} = -dy\hat{j}.$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{(-dy\hat{j}) \times (y\hat{j})}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{y dy (\hat{j} \times \hat{j})}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \vec{0}$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{0}$$



Para el alambre 3, se tiene:

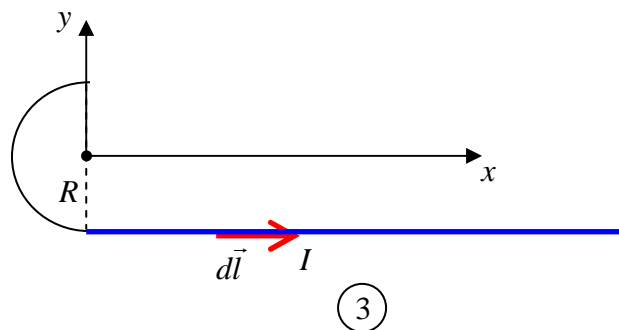
$$\vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{r}' = x\hat{i} - R\hat{j}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -x\hat{i} + R\hat{j}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$d\vec{l} = dx\hat{i}$$



$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{(dx \hat{i}) \times (-x \hat{i} + R \hat{j})}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^L \frac{dx (\hat{i} \times \hat{j})}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^L \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \left( \frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \right)_0^L \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I L}{4\pi R \sqrt{L^2 + R^2}} \hat{k}}$$

Para el alambre 2 se tiene

$$\vec{r} = 0$$

$$\vec{r}' = -x \hat{i} + y \hat{j} = -R \sin \theta \hat{i} + R \cos \theta \hat{j}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = R \sin \theta \hat{i} - R \cos \theta \hat{j}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = R$$

$$d\vec{l} = d\vec{s}$$

donde  $d\vec{s}$  es un vector tangente a la circunferencia y que es obviamente

perpendicular al vector  $(\vec{r} - \vec{r}')$ , y su módulo mide la longitud diferencial del arco. El

campo magnético viene dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Reemplazando los vectores y recordando que por ser perpendiculares, se tiene

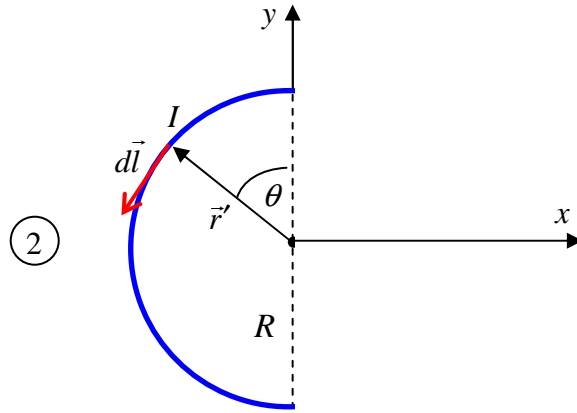
$$d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}') = ds |\vec{r} - \vec{r}'| \sin 90^\circ \hat{k} = ds |\vec{r} - \vec{r}'| \hat{k}$$

luego

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{k}$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds}{R^2} \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int ds \hat{k}$$

pero



### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$\int_0^{\pi} ds = \pi R$$

Finalmente el campo de la semi circunferencia viene dado por:

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k}$$

Por lo tanto, el campo resultante en el punto  $P$  viene dado por:

$$\vec{B}_R = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

Reemplazando los valores obtenidos

$$\vec{B}_R = 0\hat{k} + \frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k} + \frac{\mu_0 I L}{4\pi R \sqrt{L^2 + R^2}} \hat{k}$$

El campo resultante viene dado por

$$\vec{B}_R = \left\{ \frac{\mu_0 I L}{4\pi R \sqrt{L^2 + R^2}} + \frac{\mu_0 I}{4R} \right\} \hat{k}$$

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0 I}{4R} \left\{ \frac{L}{\pi \sqrt{L^2 + R^2}} + 1 \right\} \hat{k}$$

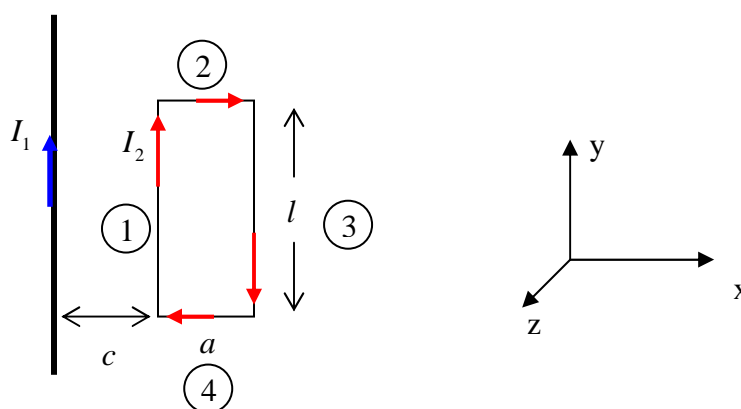
## Solucionario

## Tercera Prueba de Electromagnetismo

## Ingeniería Civil

Semestre de Primavera 2013

1.- Un alambre *infinitamente largo* es portador de una corriente  $I_1$ . Este alambre se ubica en el plano de una espira rectangular, la cual conduce una corriente  $I_2$ , tal como se muestra en la figura.



Determine la magnitud y dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético creado por el alambre largo

**Solución:**

1a) Hallar el campo magnético creado por el alambre largo usando ley de Ampere.

Dada la simetría de las líneas de campo magnético creadas por el alambre infinito, usando la ley de Ampere podemos escribir:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{neto}}$$

$$B_1 2\pi x = \mu_0 I_1$$

$$\boxed{B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}}$$

Sobre toda la espira, el campo magnético apunta entrando perpendicularmente en el plano xy, es decir:

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\hat{k})}$$

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

O también:  $\vec{B}_1 = -B_1 \hat{k}$

1b) Hallar la fuerza sobre cada segmento de alambre.

La fuerza sobre un alambre con corriente viene dada por la expresión  $\vec{F} = I_2 \int d\vec{l} \times \vec{B}_1$ , donde  $\vec{B}_1$  es el campo externo al segmento de espira que lleva una corriente  $I_2$ . Si aplicamos esta expresión a cada uno de los segmentos de la espira rotulados del 1 al 4, y rotulando cada  $d\vec{l}$  según el rótulo del segmento, se tiene:

a) segmento vertical 1:  $d\vec{l}_1 = dy \hat{j}$ ,

$$\vec{F}_1 = I_2 \int d\vec{l}_1 \times B_1(-\hat{k}) = I_2 \int dy \hat{j} \times B_1(-\hat{k}) = (-\hat{i}) I_2 \int dy B_1$$

Pero cuando varía  $y$ , la distancia  $x$  permanece constante, por lo tanto, el campo magnético no varía, sino que toma siempre el valor constante  $B_1(x=c) = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi c}\right)$ . Dado que la integral

$\int dy = l$ , la fuerza viene dada por

$$\vec{F}_1 = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi c}\right)(-\hat{i})$$

b) segmento horizontal 2:  $d\vec{l}_2 = dx \hat{i}$

$$\vec{F}_2 = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = I_2 \int_c^{c+a} dx B_1(r)(\hat{j})$$

$$\vec{F}_2 = I_2 \int_c^{c+a} dx \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\right)(\hat{j})$$

Integrando, se tiene:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right) \hat{j}$$

c) segmento vertical 3:  $d\vec{l}_3 = -dy \hat{j}$ ,

$$\vec{F}_1 = I_2 \int d\vec{l}_3 \times B_1(-\hat{k}) = I_2 \int dy (-\hat{j}) \times B_1(-\hat{k}) = (\hat{i}) I_2 \int dy B_1$$



Nuevamente el campo magnético no varía en la trayectoria de integración, por lo tanto, ocurre lo mismo que en el segmento 1, pero con el campo magnético evaluado en  $x = c + a$ ,

$$B_1(x = a + c) = \left( \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a + c)} \right)$$

Finalmente obtenemos:

$$\vec{F}_3 = \left( \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(a + c)} \right) \hat{i}$$

d) segmento horizontal 4:  $d\vec{l}_4 = -dx\hat{i}$

$$\vec{F}_4 = I_2 \int d\vec{l}_4 \times \vec{B}_1 = I_2 \int_c^{c+a} dx B_1(x)(-\hat{j})$$

$$\vec{F}_4 = I_2 \int_c^{c+a} dx \left( \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \right) (-\hat{j})$$

Integrando, se tiene:

$$\vec{F}_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left( \frac{c + a}{c} \right) (-\hat{j})$$

Vemos así que  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_4$  son iguales en módulo pero apuntan en direcciones contrarias, por lo tanto se anulan al sumarlos, es decir:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$$

Explícitamente,

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \left( \frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{2\pi c} \right) (-\hat{i}) + \left( \frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{2\pi(a + c)} \right) \hat{i}$$

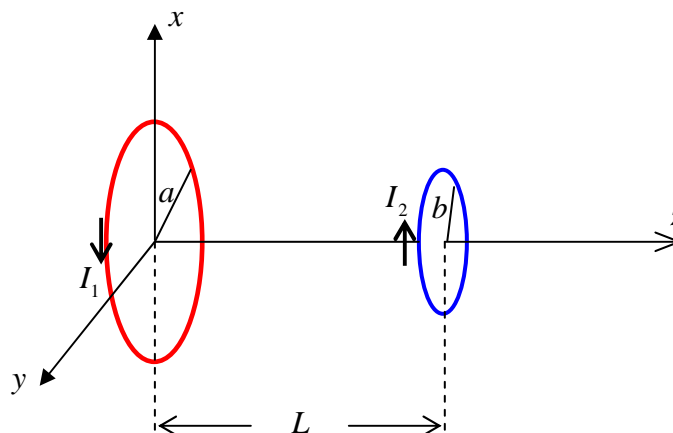
$$\vec{F}_R = \frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{2\pi} \left[ \frac{1}{a + c} - \frac{1}{c} \right] \hat{i}$$

Es decir, la fuerza neta apunta hacia la izquierda

$$\vec{F}_R = \frac{\mu_0 I_2 I_1 l a}{2\pi c(a + c)} (-\hat{i})$$

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

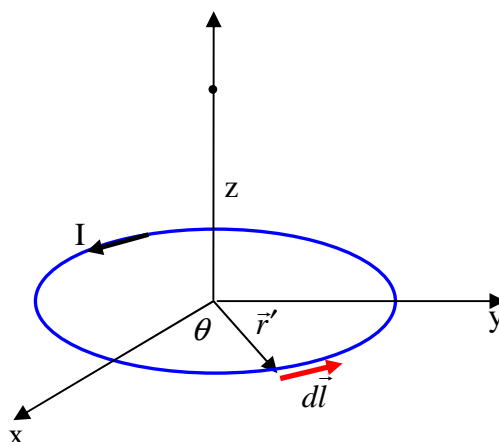
2.- Dos espiras de radios  $a$  y  $b$  respectivamente, con  $b < a$ , están colocadas en forma perpendicular a un eje común. Las espiras portan corrientes estables  $I_1$  e  $I_2$  en direcciones opuestas y sus centros están separados una distancia  $L$ , tal como se muestra en la figura.



- Encuentre una expresión para el campo magnético resultante  $\vec{B}_R(z)$  a lo largo del eje  $z$ .
- Suponga que es posible regular la corriente  $I_2$  en la espira de radio  $b$ . Encuentre el valor de  $I_2$  para que  $\vec{B}_R(z)$ , en  $z = \frac{L}{2}$ , sea igual a cero.

#### Solución:

- Cálculo del campo creado por una espira de radio  $R$  a una altura  $z$  sobre su plano.



El origen del sistema de referencia lo ponemos justo en el centro de la espira de radio  $R$ . De la figura vemos que

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

(posición del punto donde queremos medir el campo magnético) y que

$$\vec{r}' = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$$

(posición de la fuente que crea el campo).

Mirando la figura, vemos que

$$d\vec{l} = d\vec{r}' = -R \sin \theta d\theta \hat{i} + R \cos \theta d\theta \hat{j}$$

donde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

La diferencial de campo magnético viene dado por la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Calculemos  $(\vec{r} - \vec{r}')$  y su módulo:

$$(\vec{r} - \vec{r}') = -R \cos \theta \hat{i} - R \sin \theta \hat{j} + z\hat{k}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Usemos la forma del determinante para calcular el producto cruz:

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin \theta d\theta & R \cos \theta d\theta & 0 \\ -R \cos \theta & -R \sin \theta & z \end{vmatrix}$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \hat{i} zR \cos \theta d\theta - \hat{j} zR \sin \theta d\theta + \hat{k} R^2 d\theta$$

Reemplazando en Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\hat{i} zR \cos \theta d\theta - \hat{j} zR \sin \theta d\theta + \hat{k} R^2 d\theta)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Al integrar se eliminan las componentes x e y del campo magnético, ya que

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \text{ luego el campo magnético resultante apunta sólo a lo largo}$$

del eje z:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

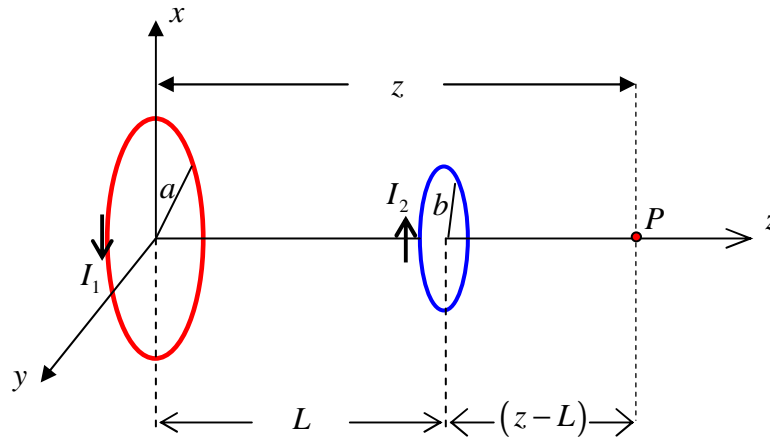
### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

Al variar el ángulo  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$  recorremos toda la espira. Sin embargo, cuando esto ocurre no varía  $z$  ni  $R$ , por lo tanto, el campo magnético  $\vec{B}(z)$  a lo largo del eje  $z$  viene dado por:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

b) Cálculo del campo creado por las dos espiras.

Ahora aplicamos este resultado general a cada una de las dos espiras, suponiendo que el punto  $P$  de observación del campo magnético se encuentra a la derecha de las dos espiras y a una distancia  $z$  del origen que ubicaremos justo en el centro de la espira de radio  $a$  con corriente  $I_1$ .



Campo magnético creado por la espira con corriente  $I_1$  ubicada en el origen

$$\vec{B}_1(z) = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Campo magnético creado por la espira con corriente  $I_2$  ubicada a una distancia  $L$  del origen

$$\vec{B}_2(z) = \frac{\mu_0 I_2 b^2}{2(b^2 + (z-L)^2)^{3/2}} (-\hat{k})$$

Nótese que los campos apuntan en distintos sentidos sobre el eje  $z$ . El campo resultante  $\vec{B}_R(z)$  de las dos espiras viene dado por la suma vectorial de los campos:

$$\vec{B}_R(z) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Explícitamente:

$$\vec{B}_R(z) = \frac{\mu_0}{2} \left[ \frac{I_1 a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{I_2 b^2}{(b^2 + (z-L)^2)^{3/2}} \right] \hat{k}$$

3b) Cálculo de la corriente  $I_2$  para lograr que en  $z = \frac{L}{2}$  se anule el campo resultante.

Evaluando el resultado general en  $z = \frac{L}{2}$  se tiene

$$\vec{B}_R(z = \frac{L}{2}) = \frac{\mu_0}{2} \left[ \frac{I_1 a^2}{\left(a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{I_2 b^2}{\left(b^2 + \left(\frac{L}{2} - L\right)^2\right)^{3/2}} \right] \hat{k}$$

Exigimos que se cumpla la condición  $\vec{B}_R(z = \frac{L}{2}) = 0$ , es decir,

$$\frac{I_1 a^2}{\left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}} - \frac{I_2 b^2}{\left(b^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}} = 0$$

Despejando, obtenemos finalmente:

$$I_2 = I_1 \frac{a^2 \left(b^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}}{b^2 \left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}}$$

## Solucionario

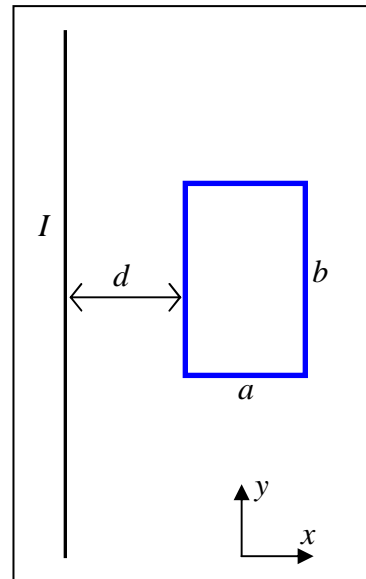
## Tercera Prueba de Electromagnetismo

## Ingeniería Plan Común

Semestre de Primavera 2014

Una espira de alambre en forma de un rectángulo de ancho  $a$  y largo  $b$  se encuentra a una distancia fija  $d$  de un alambre muy largo que lleva una corriente variable  $I(t) = I_0 \sin \omega t$ .

La espira y el alambre largo se encuentran fijos en el plano  $(x, y)$ .



a) Hallar el flujo magnético  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$  sobre la espira

b) Hallar la fem inducida  $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$  en la espira

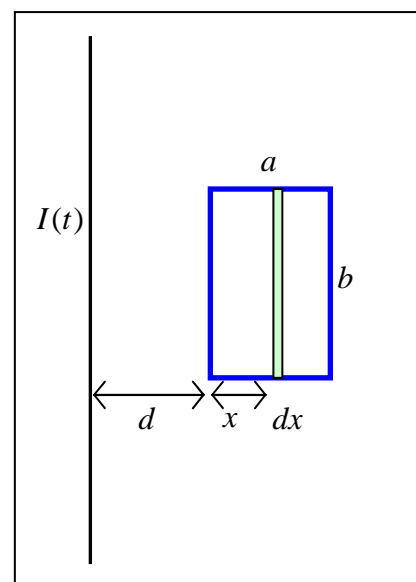
c) Hallar el sentido de la corriente inducida en la espira cuando  $\omega t$  varía desde  $\omega t = 0$  hasta  $\omega t = \frac{\pi}{2}$

d) Hallar el sentido de la corriente inducida en la espira cuando  $\omega t$  varía desde  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  hasta  $\omega t = \pi$

**Solución:**

a) Hallar el flujo magnético  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$  sobre la espira.

Si consideramos que la diferencial de superficie de la espira entra en la página  $d\vec{S} = -dS \hat{k}$ , entonces, en un primer momento, el campo magnético  $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \hat{k}$  y la diferencial de superficie  $d\vec{S} = -(b dx) \hat{k}$  son paralelos. El flujo magnético sobre el área diferencial  $dS = b dx$



mostrada en la figura que está ubicada a una distancia  $r = (d + x)$  del alambre, viene dado por:

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B dS = \int_0^a \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi(d+x)} (b dx)$$

Integrando obtenemos

$$\phi_m = \frac{\mu_0 b I(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Pero  $I = I_0 \sin \omega t$ , luego el flujo magnético  $\phi_m(t)$  es variable en el tiempo:

$$\phi_m(t) = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) I_0 \sin \omega t$$

b) Hallar la fem inducida  $\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$  en la espira.

derivando la fem recién obtenida

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) I_0 \sin \omega t \right)$$

Se tiene:

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 I_0 b \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \cos \omega t$$

c) Hallar el sentido de la corriente inducida en la espira cuando  $\omega t$  varía desde  $\omega t = 0$

hasta  $\omega t = \frac{\pi}{2}$

Cuando  $\omega t$  varía desde  $\omega t = 0$  hasta  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ , la función seno crece desde 0 hasta 1, es decir, el flujo hacia adentro de la espira aumenta. Como consecuencia, la corriente inducida  $I_i$  fluye en sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj, para generar así un campo magnético inducido que apunta hacia afuera de la página, que se opone al aumento de flujo hacia adentro.

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

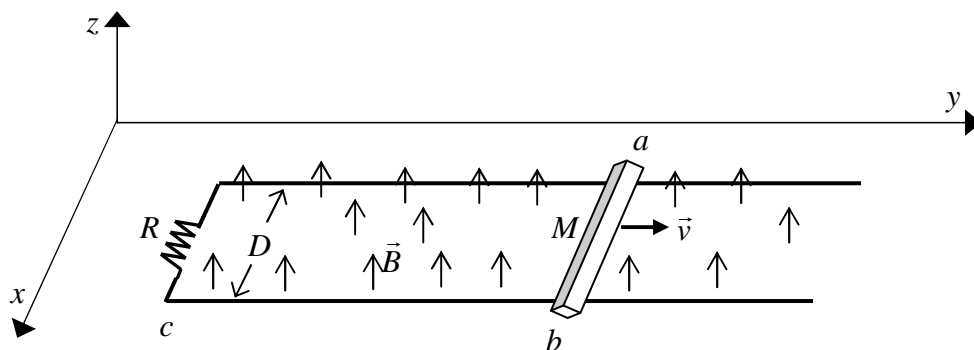
d) Hallar el sentido de la corriente inducida en la espira cuando  $\omega t$  varía desde  $\omega t = \frac{\pi}{2}$

hasta  $\omega t = \pi$

cuando  $\omega t$  varía desde  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  hasta  $\omega t = \pi$ , la función seno disminuye desde 1 hasta 0,

es decir, el flujo hacia adentro de la espira está disminuyendo. Como consecuencia, la corriente inducida  $I_i$  fluye a favor del movimiento de los punteros del reloj, para generar así un campo magnético inducido que se opone a la disminución de flujo hacia adentro.

2.- En un cierto instante de tiempo  $t$ , la barra metálica de masa  $M$  se mueve hacia la derecha a una velocidad  $\vec{v}(t) = v(t) \hat{j}$  sobre dos rieles conductores paralelos separados una distancia  $D$ . En la región de los rieles existe un campo magnético constante y uniforme que apunta en la dirección  $z$ :  $\vec{B} = B \hat{k}$ . Todo el circuito que se forma tiene una resistencia equivalente  $R$  que se muestra en la figura.



a) Hallar la fem inducida  $\mathcal{E}$  en la varilla, en magnitud y sentido, como función de la velocidad  $v$ , del campo magnético  $B$  y de la separación  $D$ .

b) Hallar la corriente inducida en el circuito  $I$ .

c) calcular la fuerza magnética  $\vec{F}_m$  que ejerce el campo magnético sobre la varilla que lleva una corriente inducida  $I$ .



- d) Utilizando los resultados anteriores, resuelva la ecuación diferencial del movimiento para encontrar la velocidad como función explícita del tiempo  $v = v(t)$ , sabiendo que en  $t = 0$ , la velocidad inicial es  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{j}$ .
- e) Use el resultado obtenido para la velocidad en función del tiempo y exprese la fem inducida  $\mathcal{E}(t)$  y la corriente inducida  $I(t)$  como función explícita del tiempo.

**Solución:**

- a) Hallar la fem inducida  $\mathcal{E}$  en la varilla, en magnitud y sentido, como función de la velocidad  $v$ , del campo magnético  $B$  y de la separación  $D$ .

*Podemos usar dos métodos para el cálculo de la fem inducida:*

Método 1: Calcular la fuerza de Lorentz  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  sobre un portador de carga positivo de la barra móvil de masa  $M$  :

Dado que  $\vec{v}(t) = v(t) \hat{j}$  y que  $\vec{B} = B \hat{k}$ , tenemos:  $\vec{F} = qvB(\hat{j} \times \hat{k}) = qvB\hat{i}$ . Esto significa que las cargas positivas son obligadas a moverse a lo largo de la barra en dirección de los punteros del reloj. Esto significa que la fem inducida apunta en la dirección de  $a \rightarrow b$ . La fem inducida se obtiene de la relación  $\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , donde el campo eléctrico viene dado por  $E = vB$ , por lo tanto,

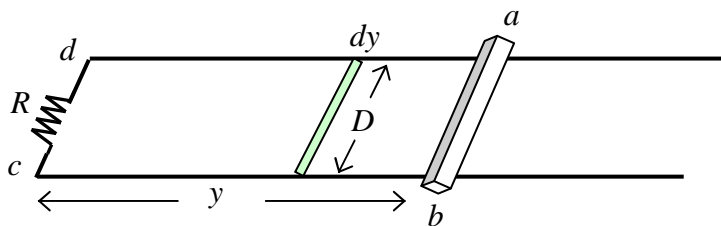
$$\mathcal{E} = \int E dl = BDv$$

$$\boxed{\mathcal{E} = BDv}$$

donde  $D$  es la separación entre los dos rieles metálicos.

Método 2: Calcularemos la fem inducida como consecuencia de la variación del flujo magnético sobre la espira de tamaño  $S = Dy$ , de área diferencial  $dS = D dy$

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas



El flujo magnético en módulo queda

$$\phi_m = \int B dS = \int BD dy = BDy$$

La fem inducida se obtiene a través de la expresión  $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$ . En valor absoluto nos queda

$$\mathcal{E} = \frac{d(BDy)}{dt} = BD \frac{dy}{dt} = BDv$$

Definiendo  $\frac{dy}{dt} = v$ , se tiene finalmente:

$$\boxed{\mathcal{E} = BDv}$$

b) Hallar la corriente inducida en el circuito  $I$ .

Dado que toda la resistencia del circuito vale  $R$ , entonces la corriente inducida vale  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ ,

es decir,

$$\boxed{I = \frac{BDv}{R}}$$

c) calcular la fuerza magnética  $\vec{F}_m$  que ejerce el campo magnético sobre la varilla móvil que lleva una corriente inducida  $I$ .

La fuerza magnética sobre la barra móvil de masa  $M$  se calcula a través de la expresión:

$\vec{F}_m = \int I d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$ , donde  $d\vec{l}$  apunta en la dirección de la corriente inducida  $I$ , es decir,  $d\vec{l} = dx \hat{i}$ , por lo tanto,

$$\vec{F}_m = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = IB \int_0^D dx (\hat{i} \times \hat{k}) = IDB(-\hat{j})$$

$$\boxed{\vec{F}_m = -IDB\hat{j}}$$

Esto significa que la fuerza magnética sobre la barra móvil apunta en dirección contraria a la velocidad, ya que  $\vec{v} = v \hat{j}$

d) Utilizando los resultados anteriores, resuelva la ecuación diferencial del movimiento para encontrar la velocidad como función explícita del tiempo, sabiendo que en  $t=0$ , la velocidad inicial es  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{j}$ .

La ecuación de movimiento viene dada por la segunda Ley de Newton:  $\vec{F} = M\vec{a} = M \frac{d\vec{v}}{dt}$ .

Al aplicarla al movimiento a lo largo del eje  $y$ , tenemos

$$-IDB = M \frac{dv}{dt}.$$

En este problema no estamos considerando roce y además las fuerzas a lo largo del eje  $z$ , es decir, el peso y la normal, se anulan entre sí.

Recordemos que la corriente inducida viene dada por  $I = \frac{BDv}{R}$ , reemplazando en la ecuación diferencial anterior se tiene:

$$-\frac{D^2 B^2}{MR} v = \frac{dv}{dt}$$

ecuación que se reescribe como

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{D^2 B^2}{MR}\right) dt$$

Integrando se tiene

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = - \left( \frac{D^2 B^2}{MR} \right) t$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{D^2 B^2}{MR} t}$$

ecuación que nos dice que en  $t = 0$ , la velocidad inicial tiene valor  $v_0 \neq 0$  y que al pasar el tiempo, la velocidad instantánea decrece exponencialmente, hasta que finalmente la barra se detiene.

e) Use el resultado obtenido para la velocidad en función del tiempo y exprese la fem inducida  $\mathcal{E}(t)$  y la corriente inducida  $I(t)$  como función explícita del tiempo.

La fem inducida viene dada por  $\mathcal{E}(t) = BDv(t)$  y la corriente inducida viene dada por

$I(t) = \frac{BD}{R} v(t)$ , reemplazando el valor de la velocidad instantánea, queda

$$\mathcal{E}(t) = BDv_0 e^{-\frac{D^2 B^2}{MR} t}$$

y

$$I(t) = \frac{BDv_0}{R} e^{-\frac{D^2 B^2}{MR} t}$$

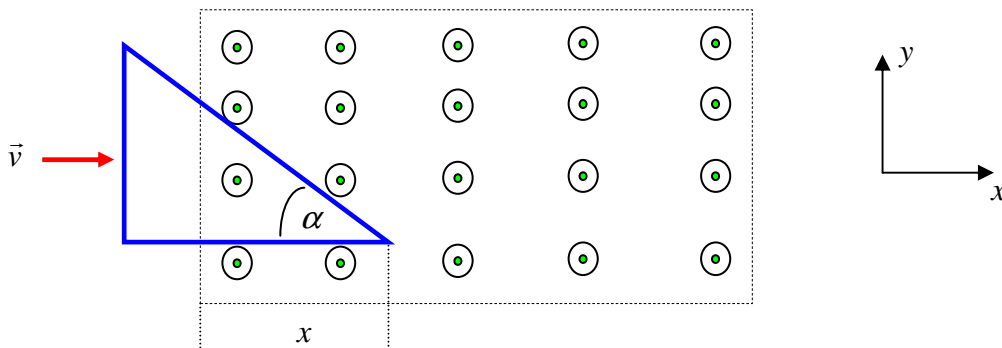
Solucionario

Prueba Optativa Electromagnetismo

Ingeniería Plan Común

Semestre de Primavera 2012

1.- Una espira con forma de triángulo rectángulo se mueve con velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$  entrando en una región de campo magnético homogéneo  $\vec{B} = B\hat{k}$  que sale de la página. Hallar la magnitud de la Fem  $\mathcal{E}$  inducida en la espira e indique en qué dirección se mueve la corriente inducida.



**Solución:**

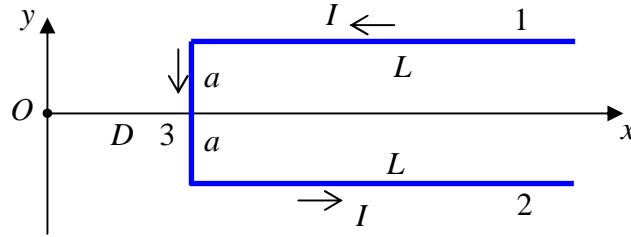
Sea  $x$  la parte horizontal del triángulo que está dentro de la región con campo. El flujo magnético vale:  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ . Si consideramos que  $d\vec{A}$  sale de la página, entonces  $\vec{B}$  y  $d\vec{A}$  son paralelos y como es constante, se tiene:  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA_{\text{triángulo}} = B\left(\frac{1}{2}xh\right)$ , donde  $h$  es la altura del triángulo rectángulo que está justo dentro de la región con campo. Dado que  $\tan \alpha = \frac{h}{x}$ , el flujo queda:  $\phi_m = \frac{1}{2}x^2B \tan \alpha$ . Aplicando Faraday-Lenz:  $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$ , se tiene:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2B \tan \alpha}{2}\right).$$

En valor absoluto, la Fem inducida vale  $\boxed{\mathcal{E} = vBx \tan \alpha}$

2.- Hallar el campo magnético vectorial en el origen  $O$  del sistema de coordenadas, producido por un alambre con corriente  $I$  formado por segmentos rectos de largo  $L$ , y un segmento vertical de largo  $2a$  que está separado del origen una distancia  $D$ .

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas



**Solución:**

Los alambres horizontales los numeramos 1 y 2 y el alambre vertical lo numeramos 3.

Alambre 1:

$$\vec{r} = \vec{0}, \quad \vec{r}' = x\hat{i} + a\hat{j}, \quad (\vec{r} - \vec{r}') = -x\hat{i} - a\hat{j}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$d\vec{l} = -d\vec{r}' = -dx\hat{i}$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_D^{D+L} \frac{dx\hat{i} \times (-x\hat{i} - a\hat{j})}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_D^{D+L} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \frac{(D+L)}{\sqrt{(D+L)^2 + a^2}} - \frac{D}{\sqrt{D^2 + a^2}} \right\} \hat{k}}$$

Por simetría el  $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$

Alambre 3:

$$\vec{r} = \vec{0}, \quad \vec{r}' = D\hat{i} + y\hat{j}, \quad (\vec{r} - \vec{r}') = -D\hat{i} - y\hat{j}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{D^2 + y^2}$$

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{-dy \hat{j} \times (-D\hat{i} - y\hat{j})}{(D^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I D}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy}{(D^2 + y^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi D} \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}} \Big|_{-a}^a \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B}_3(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi D \sqrt{D^2 + a^2}} \hat{k}}$$

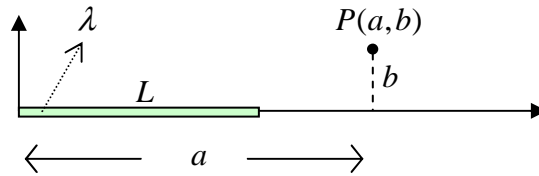
El campo resultante viene dado por  $\vec{B}_R = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$

$$\vec{B}_R = \frac{2\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \frac{(D+L)}{\sqrt{(D+L)^2 + a^2}} - \frac{D}{\sqrt{D^2 + a^2}} \right\} \hat{k} - \frac{\mu_0 I a}{2\pi D \sqrt{D^2 + a^2}} \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B}_R = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{(D+L)}{a\sqrt{(D+L)^2 + a^2}} - \frac{D}{a\sqrt{D^2 + a^2}} - \frac{a}{D\sqrt{D^2 + a^2}} \right\} \hat{k}}$$

3.- Calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$  creado por una varilla de largo  $L$ , de densidad lineal de carga constante ( $\lambda = cte$ ) en el punto  $P(a,b)$ , donde  $a > L$ . b) Calcular el potencial

electrostático en  $P(a,b)$  usando la relación  $V(\vec{r}) = \int \frac{k dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$



**Solucion:**

a) Campo eléctrico:

$$\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j}, \quad \vec{r}' = x\hat{i}, \quad (\vec{r} - \vec{r}') = (a-x)\hat{i} + b\hat{j}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$$

$$\vec{E} = \int_0^L \frac{k \lambda dx (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_0^L \frac{k \lambda dx ((a-x)\hat{i} + b\hat{j})}{((a-x)^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = k\lambda \int_0^L \frac{dx(a-x)}{((a-x)^2 + b^2)^{3/2}} \hat{i} + k\lambda b \int_0^L \frac{dx}{((a-x)^2 + b^2)^{3/2}} \hat{j}$$

$$\boxed{\vec{E} = k\lambda \left[ \frac{1}{\sqrt{(a-L)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \hat{i} + \frac{k\lambda}{b} \left[ \frac{L-a}{\sqrt{(a-L)^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \hat{j}}$$

b) Potencial electrostático:

Usando los mismos vectores anteriores, podemos escribir el potencial electrostático como

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$V = \int_0^L \frac{k\lambda dx}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

$$V = k\lambda \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{(a-L) + \sqrt{(a-L)^2 + b^2}} \right)$$



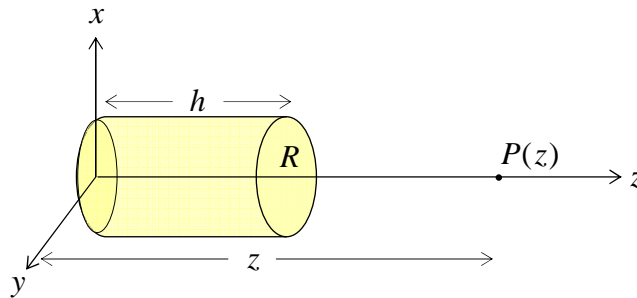
Solucionario

Prueba Optativa Electromagnetismo

Ingeniería Plan Común

Semestre de Otoño 2013

1.- a) Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}_p$  en un punto  $P$  exterior a un cilindro con densidad volumétrica de carga  $\rho$ , radio  $R$  y altura  $h$ , cuyo eje coincide con el eje  $Z$ , tal como se muestra en la figura. b) Calcule el potencial electrostático  $\phi_p$ .

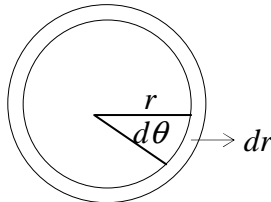


**Solución:**

a) Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}_p$

En primer lugar, consideremos un diferencial de carga  $dq = \rho dV$ , donde el volumen  $dV$  corresponde al cilindro diferencial de carga ubicado a una distancia  $z'$  de la base del cilindro,

$$dV = r d\theta dr dz' \quad (1)$$



Poniendo el origen del sistema de coordenadas en la base del cilindro, se tiene,

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad (2)$$

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

donde  $z$  localiza al punto fijo  $P$ . La posición del elemento diferencial de volumen viene dada por,

$$\vec{r}' = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + z' \hat{k} \quad (3)$$

donde  $r$  es el radio variable del elemento de volumen

Luego

$$(\vec{r} - \vec{r}') = (z - z') \hat{k} - r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} \quad (4)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2} \quad (5)$$

El campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r} - \vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + (z - z') \hat{k}] r d\theta dr dz'}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (7)$$

Dado que la coordenada  $\theta$  varía entre 0 y  $2\pi$ , las dos primeras integrales se anulan y la última integral queda,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int \frac{(z - z') r dr dz'}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (8)$$

Dado que las variables de integración son independientes, hagamos primero la integral sobre la variable  $r$ , esto es,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^h (z - z') dz' \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (9)$$

Se obtiene,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^h (z - z') dz' \left( \frac{1}{|z - z'|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \right) \hat{k} \quad (10)$$

Dado que  $z - z' > 0$ , se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \int_0^h dz' - \int_0^h \frac{(z - z') dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \right] \hat{k} \quad (11)$$

El campo eléctrico resultante depende sólo de la variable  $z$ ,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ h + \sqrt{R^2 + (z-h)^2} - \sqrt{R^2 + z^2} \right] \hat{k} \quad (12)$$

b) Calcule el potencial electrostático  $\phi_p$ .

El potencial viene dado por

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (13)$$

Considerando el mismo elemento de volumen, y reemplazando los valores obtenidos antes, se tiene

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho r d\theta dr dz'}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} \quad (14)$$

Integrando sobre  $\theta$ , y separando las integrales, se tiene,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^h dz' \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} \quad (15)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^h dz' \left[ \sqrt{R^2 + (z-z')^2} - |z-z'| \right] \quad (16)$$

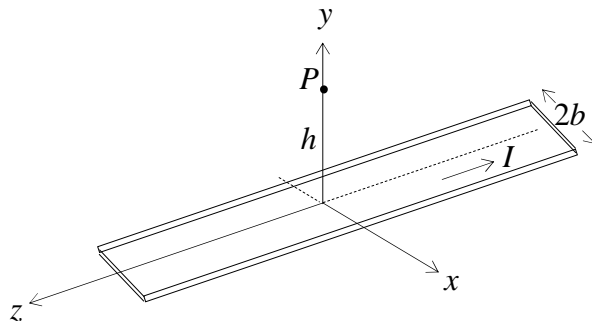
$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \int_0^h \sqrt{R^2 + (z-z')^2} dz' - \int_0^h |z-z'| dz' \right] \quad (17)$$

Integrando se obtiene  $\phi(z)$ ,

$$\begin{aligned} \phi(z) = \frac{\rho}{4\epsilon_0} & \left( h^2 - 2zh - (z-h) \sqrt{(z-h)^2 + R^2} + z \sqrt{z^2 + R^2} \right) - \\ & - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \ln \left( \frac{(z-h) + \sqrt{(z-h)^2 + R^2}}{z + \sqrt{z^2 + R^2}} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

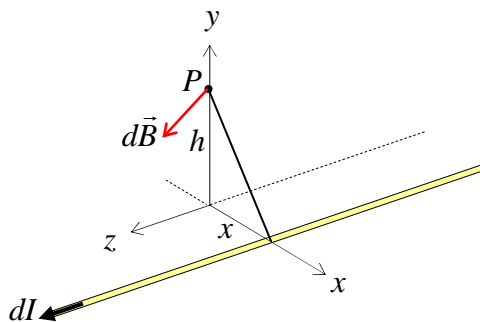
2.- Por una delgada tira metálica muy larga de ancho  $2b$  circula una corriente  $I$  a lo largo de su longitud en la dirección  $\hat{k}$ , como se muestra en la figura. Hallar el campo magnético en el punto  $P$  a una altura  $h$  sobre el centro de la tira.

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas



#### Solución:

Consideremos una tira diferencial de espesor  $dx$  que lleva una corriente diferencial  $dI$  a una distancia  $x$  del origen de coordenadas.



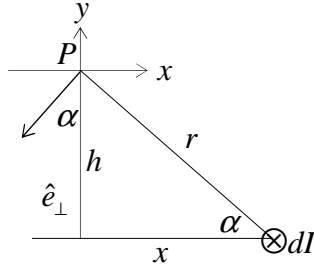
La corriente diferencial se obtiene a través de la relación

$$\frac{I}{2b} = \frac{dI}{dx} \quad (1)$$

Por la ley de Ampere sabemos que el campo magnético producido por un alambre muy largo viene dado en magnitud por la relación,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2)$$

donde  $r = \sqrt{h^2 + x^2}$ , es la distancia desde el alambre al punto de observación del campo magnético. La dirección del campo magnético viene dada por un vector unitario  $\hat{e}_\perp$  perpendicular al vector que va desde el punto  $P$  al alambre diferencial, como se ve en la figura



El vector unitario  $\hat{e}_\perp$  viene dado por,

$$\hat{e}_\perp = (-\sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j}) \quad (3)$$

Las funciones trigonométricas vienen dadas por

$$\sin \alpha = \frac{h}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad (4)$$

Luego, el vector unitario queda

$$\hat{e}_\perp = \frac{1}{r}(-h\hat{i} - x\hat{j}) \quad (5)$$

En consecuencia, el campo magnético producido por el alambre con corriente diferencial, viene dado por

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} \hat{e}_\perp \quad (6)$$

Reemplazando (1) y (5) en (6), se tiene

$$\vec{B} = \int_{-b}^b \frac{\mu_0 I dx}{4b\pi r^2} (-h\hat{i} - x\hat{j}) \quad (7)$$

Separando las integrales

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I h}{4b\pi} \int_{-b}^b \frac{dx}{(h^2 + x^2)} (\hat{i}) - \frac{\mu_0 I}{4b\pi} \int_{-b}^b \frac{x dx}{(h^2 + x^2)} (\hat{j}) \quad (8)$$

Integrando,

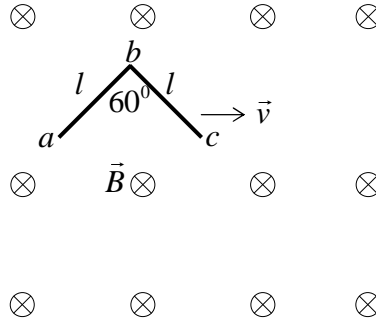
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I h}{4b\pi} \frac{1}{h} \arctan\left(\frac{x}{h}\right) \Big|_{-b}^b (\hat{i}) - \frac{\mu_0 I}{8b\pi} \ln(h^2 + x^2) \Big|_{-b}^b (\hat{j}) \quad (9)$$

La integral en la dirección  $\hat{j}$  se anula, luego nos queda

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2b\pi} \arctan\left(\frac{b}{h}\right)(\hat{i}) \quad (10)$$

3.- El alambre de la figura está formado por dos barras de igual largo  $l$  que hacen un ángulo  $\theta = 60^\circ$  entre sí. El alambre se mueve hacia la derecha con velocidad constante  $\vec{v}$  en una región de campo magnético  $\vec{B}$  constante y uniforme. Hallar la fem  $\mathcal{E}_{ab}$ ,  $\mathcal{E}_{bc}$  y  $\mathcal{E}_{ac}$ .



#### Solución:

Consideremos el alambre  $ab$ .

El campo magnético viene dado por  $\vec{B} = B(-\hat{k})$  y la velocidad por  $\vec{v} = v\hat{i}$ , por lo tanto, la fuerza magnética  $\vec{F}_m$  sobre una carga  $q$  del alambre viene dada por

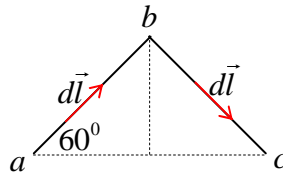
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB(\hat{j}) \quad (1)$$

Porque ambos vectores son perpendiculares.

La fem inducida se puede calcular como el trabajo por unidad de carga

$$\mathcal{E}_{ab} = \frac{1}{q} \int_a^b \vec{F}_m \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

donde  $d\vec{l}$  apunta a lo largo del alambre, desde  $a$  hasta  $b$ .



Mirando la figura,  $d\vec{l}$  se puede escribir de la siguiente forma

$$d\vec{l} = dl(\cos 60^0 \hat{i} + \sin 60^0 \hat{j}) \quad (3)$$

La relación (2), queda,

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b vB(\hat{j}) \cdot dl(\cos 60^0 \hat{i} + \sin 60^0 \hat{j}) \quad (4)$$

Integrando, se tiene,

$$\mathcal{E}_{ab} = vBl \sin 60^0 \quad (5)$$

Consideremos el alambre  $bc$ .

Procediendo del mismo modo anterior, pero ahora con  $d\vec{l}$  dado por

$$d\vec{l} = dl(\cos 60^0 \hat{i} - \sin 60^0 \hat{j}) \quad (6)$$

La fem queda

$$\mathcal{E}_{bc} = \int_b^c vB(\hat{j}) \cdot dl(\cos 60^0 \hat{i} - \sin 60^0 \hat{j}) \quad (7)$$

Integrando, se obtiene la misma expresión anterior, pero con signo cambiado,

$$\mathcal{E}_{bc} = -vBl \sin 60^0 \quad (8)$$

Por lo tanto, la fem total entre los puntos  $a$  y  $c$  viene dada por

$$\mathcal{E}_{ac} = \mathcal{E}_{ab} + \mathcal{E}_{bc} \quad (9)$$

Luego,

$$\mathcal{E}_{ac} = vBl \sin 60^0 - vBl \sin 60^0 = 0 \quad (10)$$

### 2.3.1 Unidad IV: Solucionario de Pruebas



### 2.3.2 Guías de Laboratorio

---

En esta parte del Dossier se muestra un conjunto de Guías de Laboratorio que se han usado en años anteriores, y que sirven para complementar los contenidos teóricos que se desarrollan en la cátedra.

Universidad de Tarapaca

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

#### Laboratorio N° 1: Electrostática

#### Electromagnetismo Ingeniería Plan Común

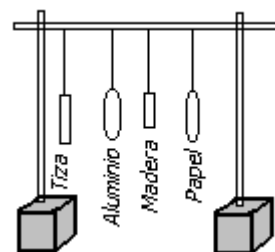
#### Objetivos:

- Verificar experimentalmente la electrización de los cuerpos por frotamiento, por contacto y por inducción.
- Verificar experimentalmente la conservación de la carga eléctrica.
- Clasificar los materiales en conductores y aislantes o dieléctricos.
- Comprender los conceptos de Fuerza Electrostática y Campo Eléctrico y sus propiedades.
- Verificar experimentalmente la Ley de Coulomb

#### EXPERIMENTO N° 1: Electrización por frotamiento

En el montaje que muestra la figura **acerque** una varilla a cada uno de los cuerpos de distinto material y observe si presentan algún comportamiento en especial. Luego acerque la misma varilla, que ha sido previamente frotada, a cada uno de los cuerpos colgantes e indique si presentan un comportamiento

diferente al caso anterior. ¿La varilla al ser frotada adquiere alguna propiedad? Comente al respecto. Repetir el procedimiento sobre un hilo de agua, ¿Qué observa?, ¿puede concluir que: “ La Fuerza eléctrica actúa sobre todos los cuerpos y además a distancia”? Discuta este

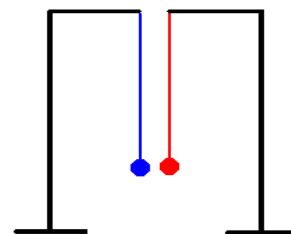


### 2.3.2 Guías de Laboratorio

argumento con su grupo de trabajo y explique por qué un cuerpo se carga eléctricamente al ser frotado.

#### **EXPERIMENTO N° 2: “Electrización por contacto y Fuerzas entre cargas del mismo signo”.**

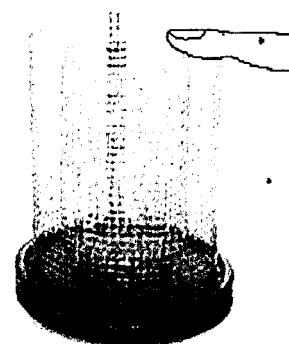
**2.1.-** Colocar dos péndulos a una pequeña distancia como muestra la figura. Ubique una varilla cargada por frotamiento en el espacio entre las esferas de los péndulos haciendo que ésta las toque al mismo tiempo. ¿Qué observa?. Dibujar las fuerzas que actúan sobre cada una de las esferas y explique el procedimiento para cargar un cuerpo por contacto.



**Jaula de Faraday y sensor de carga:** Este es un equipo que le permitirá conocer la cantidad y signo de las cargas eléctricas, el cual utilizará en todas las experiencias que se indican a continuación.

#### **Observaciones sobre la Jaula de Faraday**

Para descargar la Jaula de Faraday hay que tocarla como indica la figura, con un solo dedo y al mismo tiempo ponerlo en contacto con las dos rejillas. Sacar primero el dedo de la rejilla interior y luego de la exterior.



La Jaula de Faraday trae como accesorios tres varillas con discos en uno de los extremos. Las varillas con disco de color azul y con disco de color blanco se cargan mutuamente por frotamiento y la tercera varilla tiene un disco conductor que es el probador de carga. Para descargar los discos de las varillas se hace contacto a tierra tocándolos y para verificar si están descargados se introducen en la jaula y si marca el sensor es que aún tienen carga.

## 2.2.- Cargar la Jaula de Faraday por contacto.

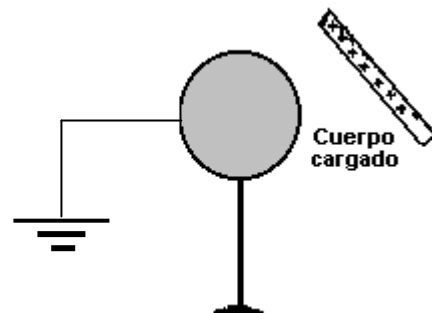
Introduzca una de las varillas con el disco previamente cargado por frotamiento y toque con éste a la Jaula. ¿Qué observa en la pantalla del monitor? ¿Cómo lo explica?. Realice el diagrama de carga en la Jaula de Faraday.

## EXPERIMENTO N° 3: “Electrización por Inducción”

3.1.- Introduzca una de las varillas, con el disco con carga de signo conocido (cuerpo inductor) dentro de la Jaula pero sin tocarla y luego haga contacto a tierra tocando la malla interior de la jaula con un dedo, en seguida retirar el dedo y finalmente retirar el cuerpo inductor ¿Qué indica el sensor de carga en el monitor? ¿Cómo lo explica?. Realice el diagrama de cargas.

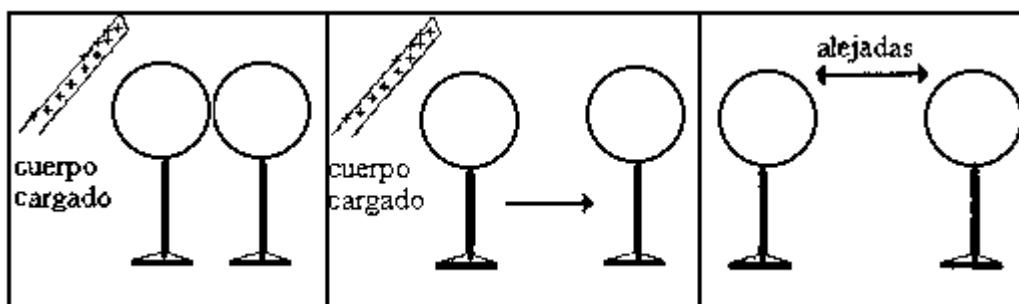
### 3.2.- “Cargar una esfera conductora por Inducción”.

En presencia de un cuerpo cargado (cuerpo inductor) toque con un dedo (conexión a tierra) a la esfera conductora eléctricamente neutra. Luego en presencia del cuerpo inductor retire el dedo y luego retire el cuerpo inductor. Utilice el probador de carga para verificar si la esfera está cargada y cuál es el signo de la carga con respecto al signo del cuerpo inductor. Concluya respecto a todo el proceso y al resultado.



3.3.- Cargar simultáneamente por Inducción dos esferas conductoras de igual tamaño”.

Acerque el cuerpo cargado (mica que ha sido previamente frotada) a las dos esferas que están en contacto, tal como muestra el primer cuadro de la figura. Separe las esferas (Segundo cuadro) y luego retire la mica como muestra el tercer cuadro.



Utilice el probador de carga para conocer el signo de la carga en cada una de las esferas, realice los diagramas de cargas y concluya al respecto.

Una vez conocido el signo de la carga en cada una de las esferas, ¿qué sucede si pone en contacto a ambas esferas?. Utilice el probador de carga para verificar su suposición.

¿Se cumple el principio de conservación de la carga? Justifique su respuesta.

#### **EXPERIMENTO N° 4: “Conservación de la carga”**

Frote los discos, azul y blanco, e introdúzcalos juntos en la jaula, SIN TOCARLA.. ¿Qué observa? Explíque. Repita la acción anterior, pero saque uno de los discos. ¿Qué observa? Ahora vuelva a introducirlo. ¿Qué observa? Repita la acción pero con el otro disco. Explique lo que sucede. ¿Qué prueba este experimento? ¿Cuál carga es la que se conserva?

#### **EXPERIMENTO N° 5: Materiales Conductores y Materiales Aislantes**

Una, con varillas de distintos materiales, las placas metálicas superiores de dos electros copios neutros y cargue por contacto uno de ellos y luego observe qué pasa con el electros copio que no fue cargado. Clasifique los materiales de acuerdo a lo observado y defina qué es un material conductor y qué es un material aislante.

**EXPERIMENTO N° 6 : Distribución de cargas en esferas conductoras de distinto tamaño.**

Cargue simultáneamente por inducción, dos esferas conductoras de distinto tamaño utilizando una mica previamente frotada y utilice el probador de carga y el sensor para estudiar la distribución de carga en cada una de ellas. Realice los diagramas de carga y concluya al respecto.

**(No descargue el probador cada vez que la use en la esfera, pero si descargue la jaula).**

**EXPERIMENTO N° 7: “Distribución de carga en un conductor cónico”**

Cargue el conductor cónico por inducción y utilice el probador de carga y el sensor para estudiar la distribución de la carga en el conductor. Para ello coloque el probador en la punta del conductor y luego en la parte más ancha.. ¿Cómo es la distribución de las cargas?. Realice el diagrama de carga y concluya al respecto.

**EXPERIMENTO N° 8: “Campo eléctrico de una carga puntual”**

Utilizando el Generador de Van der Graff se podrá simular la forma del campo eléctrico creado por una carga puntual (esfera del generador). Dibuje lo que observó.

Ahora que conoce la forma del campo eléctrico para una carga puntual, dibuje el campo eléctrico para las distribuciones de carga de los experimentos **6) y 7).**

**EXPERIMENTO N° 9:** Ley de Coulomb (Demostrativo) “ La magnitud de la Fuerza electrostática entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional a la distancia que las separa al cuadrado” . Cálculo de la constante K.

### 2.3.2 Guías de Laboratorio

Universidad de Tarapaca

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

Laboratorio N° 2: Superficies y líneas equipotenciales y líneas de campo eléctrico

Electromagnetismo Ingeniería Plan Común

#### **Objetivos:**

- Verificar experimentalmente que la superficie de un conductor es una superficie equipotencial.
- Estudiar la dependencia de la diferencia de potencial con el radio en esferas conductoras cargadas con igual cantidad de carga eléctrica.
- Dibujar con datos experimentales las líneas equipotenciales para electrodos de distinta configuración.
- Dibujar las líneas de campo eléctrico basándose en las líneas equipotenciales de distintas configuraciones.
- Determinar experimentalmente, en magnitud y dirección, el campo eléctrico para distintas posiciones en el espacio entre dos electrodos de distinta configuración.

#### **Primera actividad:**

**Nota:** *El electrómetro conectado a la Jaula de Faraday permite medir diferencias de potencial.*

Cargue por inducción una esfera conductora y mida la diferencia de potencial en distintos puntos sobre la superficie de la esfera utilizando el probador de carga y la Jaula de Faraday conectada al electrómetro. ¿Es la superficie de la esfera conductora una superficie equipotencial?. Piense en otra forma de realizar la experiencia para dar su respuesta y concluya al respecto. Si la superficie conductora tiene forma irregular, ¿cree Ud. que también es una superficie equipotencial?

#### **Segunda actividad:**

Cargue simultáneamente por inducción dos esferas de distinto tamaño y mida en cada una de ellas la diferencia de potencial en distintos puntos, de la misma forma que en la actividad anterior. Compare los valores y concluya al respecto. Mida la diferencia de

potencial conectando la superficie de ambas esferas directamente con los cables de la Jaula de Faraday que a su vez está conectada al electrómetro. Cambie el orden de los cables y concluya respecto a los resultados.

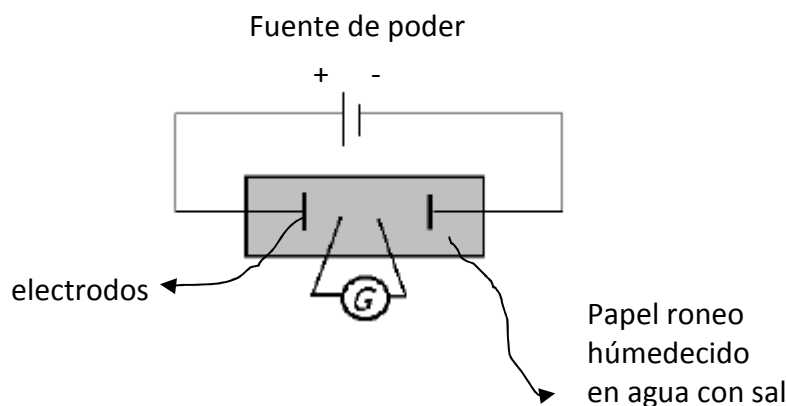
**Tercera actividad:** Líneas Equipotenciales y Líneas de Campo Eléctrico.

En una cubeta de vidrio vierta agua con sal una profundidad de 0,5 cm aproximadamente y sumerja en ella una hoja de papel roneo tratando de que éste se moje en forma pareja. En uno de los extremos del papel mojado fije un electrodo curvo conectado al polo positivo de la fuente de poder, y en el otro extremo fije un electrodo plano conectado al polo negativo de la fuente de corriente continua. Entre los electrodos debe haber una diferencia de potencial máxima de 8 volt.

Utilizando un voltímetro digital, conecte el punto común al electrodo negativo (conector fijo) y el otro conector positivo (conector móvil) ubíquelo en una posición cercana al electrodo curvo y mida la diferencia de potencial en ese punto, luego encuentre otros puntos donde la diferencia de potencial sea la misma que midió anteriormente y marque cada punto encontrado con un lapicero de pasta. La cantidad de puntos debe ser suficiente para trazar la línea equipotencial sin dificultad.

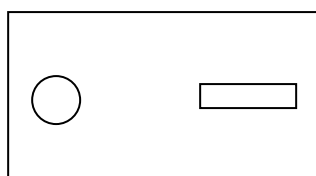
Repita el procedimiento ubicando el conector móvil en otra posición, anotando y marcando los puntos para el nuevo valor de la diferencia de potencial. Este proceso debe ser repetido hasta cubrir la distancia que separa a los electrodos.

Terminada la actividad, saque el papel de la cubeta para que se seque. Una vez seca la hoja, dibuje las líneas equipotenciales y las respectivas líneas de campo eléctrico.



**Cuarta actividad:** Magnitud y Dirección del Campo Eléctrico.

En la cubeta con agua salada y papel roneo en el fondo de ella, ubique dos electrodos de la forma que muestra la figura. Ubique y dibuje una línea equipotencial cerca del electrodo curvo y otra cerca del electrodo plano y elija algunos puntos sobre ellas donde determinará la magnitud y dirección del campo eléctrico, de acuerdo a la información teórica que se le entrega a continuación. Discuta si los resultados son consistentes con los resultados obtenidos dibujando las líneas de campo eléctrico a partir de las líneas equipotenciales que pasan por cada punto  $P$ .



**Quinta Actividad:** Simulación computacional de líneas de campo y equipotenciales. (demostrativo)

Puede complementar esta actividad utilizando un software de simulación computacional que aparece en la dirección Web que se indica más abajo. Ud. podrá verificar si sus resultados experimentales están de acuerdo con la teoría.

**Página Web:**

<http://www.falstad.com/emstatic/index.html>

**Teoría**

*Determinación del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  a partir del potencial  $V(\vec{r})$ .*

El potencial electrostático  $V(\vec{r})$  se puede obtener a partir del conocimiento del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ , a través de la siguiente expresión:  $V(\vec{r}) = \Delta V_{ref \rightarrow r} = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , sabiendo que en el punto de referencia se cumple que  $V(ref) = 0$ . Por otra parte, conociendo el potencial  $V = V(x, y)$  en una región plana del espacio, se puede obtener el campo eléctrico en la forma



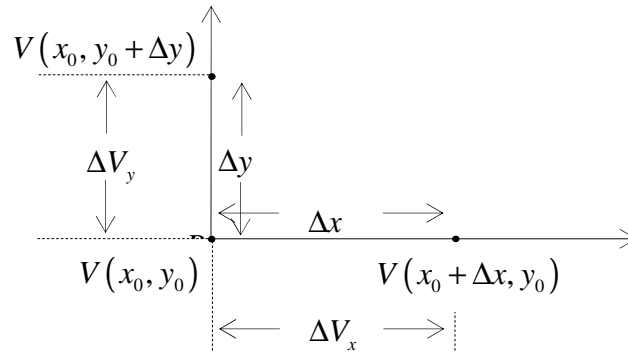
$$\vec{E}(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j}; \rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Utilizando esta expresión general, y conociendo los valores del potencial  $V = V(x, y)$  en el plano  $(x, y)$ , encontraremos experimentalmente el campo eléctrico  $\vec{E}(x, y) = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}$ . Considere la siguiente aproximación para calcular las derivadas parciales en forma experimental:

$$E_x \approx -\left(\frac{V(x + \Delta x, y) - V(x, y)}{\Delta x}\right) = -\left(\frac{\Delta V_x}{\Delta x}\right)$$

$$E_y \approx -\left(\frac{V(x, y + \Delta y) - V(x, y)}{\Delta y}\right) = -\left(\frac{\Delta V_y}{\Delta y}\right)$$

Suponiendo que en el plano de la figura existe una distribución de potencial electrostático  $V(x, y)$  y que Ud. se ubica en un punto  $P$  de coordenadas  $(x_0, y_0)$ , lo que debe medir para calcular  $E_x$  y  $E_y$  son las diferencias de potencial  $\Delta V_x$  entre  $x_0$  y  $(x_0 + \Delta x)$  a lo largo del eje  $X$ , y las diferencias de potencial  $\Delta V_y$  entre  $y_0$  y  $(y_0 + \Delta y)$  a lo largo del eje  $Y$ , tal como se muestra en la figura a continuación.



En consecuencia, midiendo  $\Delta x, \Delta y, \Delta V_x$  y  $\Delta V_y$  se obtiene experimentalmente el campo eléctrico

$$\vec{E}(x, y) \approx -\left(\frac{\Delta V_x}{\Delta x}\right) \hat{i} - \left(\frac{\Delta V_y}{\Delta y}\right) \hat{j}$$

### 2.3.2 Guías de Laboratorio

Universidad de Tarapaca

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

#### Laboratorio N° 3: Condensadores y Capacitancia

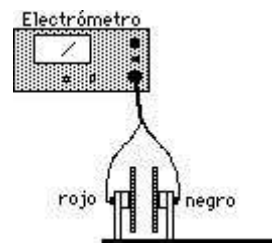
##### Electromagnetismo Ingeniería Plan Común

#### Objetivos:

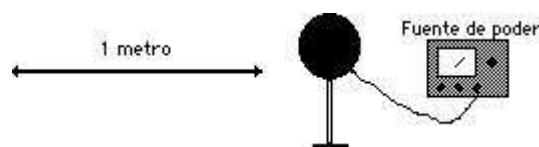
- Conocer las propiedades básicas de los condensadores.
- Experimentar las relaciones entre carga y voltaje cuando se varía la distancia entre las placas conductoras del condensador.
- Determinar experimentalmente la constante dieléctrica de un material aislante.
- Analizar las curvas de carga y descarga de un condensador.
- Medir experimentalmente la constante de tiempo  $\tau$  del condensador y compararla con el valor teórico.

**Actividad 1:** Medición de diferencia de potencial para carga fija para distintas distancias entre las placas del condensador.

Use los cables de la Jaula de Faraday para conectar el electrómetro con el condensador como lo muestra la figura y separe las placas del condensador  $d = 5\text{mm}$ .

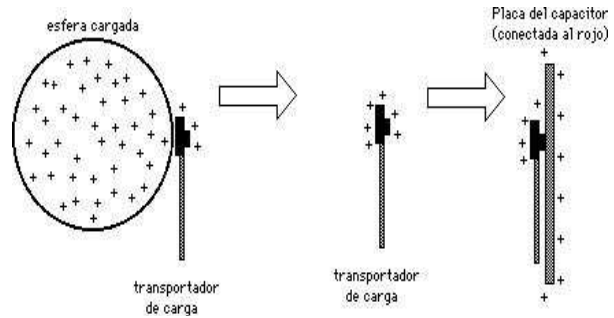


Conecte la esfera conductora a la fuente de potencial como lo muestra la figura. Separe aproximadamente un metro la esfera conductora del condensador y del electrómetro de manera que no afecte en las mediciones.



Encienda la fuente a 1000 V y también el electrómetro. Este debe tener una lectura inicial de 0 V, de no ser así presione el botón de descarga del electrómetro.

La esfera conductora que está conectada a la fuente, proporciona una carga  $Q$ . Para transferir esta carga  $Q$  al condensador use el transportador de carga. Después toque el condensador con la paleta como se muestra en la siguiente figura.



Al momento que se toca la placa del condensador, se registra un voltaje en el electrómetro. Si es necesario, cambie la escala del voltaje. Anote el valor de la diferencia de potencial. Repita la transferencia de carga para distancias de 10 mm, 20 mm, y 30 mm y registre en una tabla los valores de la distancia  $d$  y los valores de diferencia de potencial respectivo. Asegúrese de descargar el electrómetro cada vez que vaya a hacer una medición. Trate de hacer las transferencias de la misma manera cada vez. Analice los datos que registra su tabla de valores y concluya respecto de la relación distancia entre las placas con la diferencia de potencial entre las placas del condensador.

### Actividad 2: Cálculo de la capacitancia para una carga fija y distancia variable

Con los datos de la carga, la cual puede medir con el sensor de carga conectado a la Jaula de Faraday, y la diferencia de potencial medida para cada una de las distancias, calcule la capacitancia usando la expresión  $C = \frac{Q}{\Delta V}$  y relacione estos resultados con la conclusión que planteó en la actividad anterior.

También puede calcular la capacitancia en el caso de un condensador de placas paralelas con la expresión:

$$C = \frac{k\epsilon_0 A}{d}.$$

Considere que cada placa tiene un diámetro de 18 cm,  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \left[ \frac{C^2}{Nm^2} \right]$ , las distancias entre las placas son las mismas que en la actividad 1, y que la constante dieléctrica  $k$  es aproximadamente igual a 1 para el aire. Escriba el procedimiento con todos

### 2.3.2 Guías de Laboratorio

los cálculos y compare los valores con los obtenidos en la actividad 2 y concluya al respecto.

**Actividad 3:** Medición de carga para una diferencia de potencial fija para distintas distancias entre las placas del condensador.

Ahora conecte la fuente de 1000 Volt directamente a las placas del condensador porque de esa forma fijamos la diferencia de potencial entre las placas del condensador.

Para las mismas distancias de la actividad 1, mida la carga  $Q$  en la placa, conectada al cable rojo, tocándola con el probador de carga y a través del sensor de carga conectado a la Jaula de Faraday podrá leer en la pantalla del monitor su valor.

Con los valores de la carga  $Q$  y la diferencia de potencial, calcule nuevamente la capacitancia del condensador para las distintas distancias. Estudie la relación experimental entre la carga  $Q$  en las placas del condensador y la separación  $d$ . Analice los resultados y concluya al respecto.

**Actividad 4:** Cálculo de la constante dieléctrica  $k$

En esta experiencia, el condensador se mantiene con la misma diferencia de potencial fija de 1000 Volt. Introduzca el material dieléctrico (cartulina) entre las placas del condensador sin dejar espacio entre ellas y mida la carga y la separación  $d$ .

Usando la expresión  $C = \frac{k\epsilon_0 A}{d}$ , determine el valor de la constante dieléctrica  $k$

El valor de la constante dieléctrica  $k$  ¿es mayor o menor que la del aire?, ¿podría explicar la diferencia de estos valores?

Repita el procedimiento para otro dieléctrico.

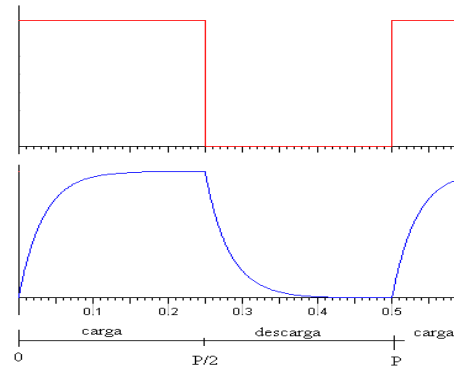
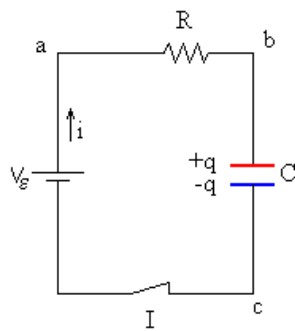
**Actividad 5:** Análisis de las curvas de carga y descarga de un condensador.

El circuito que usará consta de un condensador y una resistencia (circuito RC). La pantalla de su monitor le mostrará la curva de la carga y descarga del condensador. Analice estas curvas y comente al respecto.

**Actividad 6:** Cálculo de la constante de tiempo  $\tau$

En un circuito eléctrico que contiene una resistencia eléctrica  $R$ , un condensador de capacitancia  $C$  y una fuente, se establece una corriente eléctrica que varía al cargar y al descargar el condensador. En esta experiencia se mide la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los extremos del condensador. En el proceso de carga y descarga, el potencial  $\Delta V$  cambia con el tiempo. En el proceso de descarga, el tiempo  $\tau$  que demora el condensador en pasar de un valor inicial  $\Delta V_0$  a un valor  $\left(\frac{\Delta V_0}{e}\right) = \left(\frac{\Delta V_0}{2.7183}\right)$  se llama tiempo de descarga del condensador.

Lea en el gráfico “diferencia de potencial en función del tiempo” para la curva de descarga, el valor experimental del tiempo  $\tau$ . Compare el resultado obtenido con el valor teórico dado por  $\tau = RC$ .



### 2.3.2 Guías de Laboratorio

Universidad de Tarapaca

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

#### Laboratorio N° 4: Conexión de condensadores , Ley de Ohm y Circuitos

##### Electromagnetismo Ingeniería Plan Común

### Objetivos

1. Determinar experimentalmente la capacitancia equivalente  $C_E$  en conexiones de condensadores en serie y en conexiones de condensadores en paralelo, utilizando los valores medidos de las constantes de tiempo  $\tau$  individuales y en las conexiones serie y paralelo.
2. Estudiar las características de los circuitos en serie y en paralelo.
3. Determinar experimentalmente si un conductor es óhmico o no óhmico.

### *Actividad 1: Conexión de Condensadores*

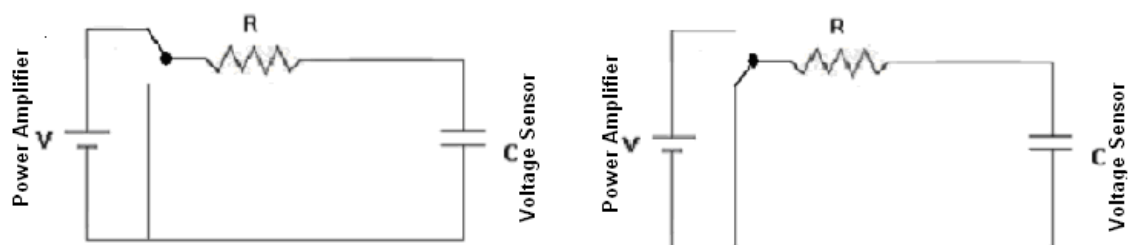
**1.1.-** Montar el circuito mostrado en la figura 1 usando un tablero de conexiones, el programa Data Studio y un sensor de voltaje.

Los condensadores que utilizará tienen polaridad por lo tanto debe asegurarse que la conexión de ellos esté correcta.

**1.2.-** Abra la gráfica de voltaje en función del tiempo.

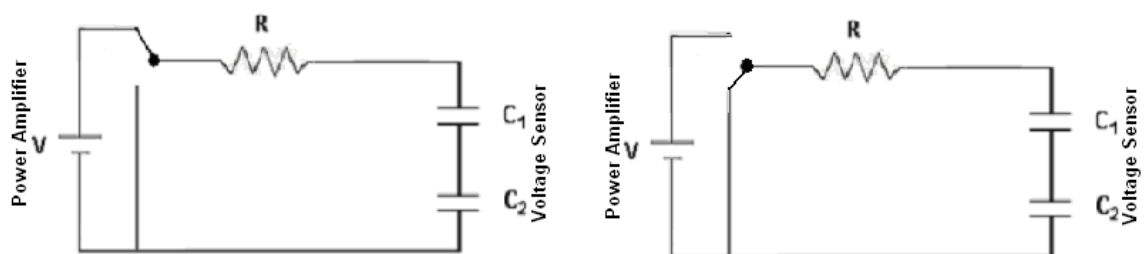
**Nota:** En los circuitos de las figuras 1, 2 y 3 los condensadores son de capacitancia  $47\mu F$  y  $100\mu F$  . La resistencia eléctrica es de  $10\ k\ \Omega$

**1.3.-** Determine la constante de tiempo  $\tau$  del circuito RC de la figura 1 para cada condensador de la misma forma que lo hizo en el laboratorio anterior.



**Figura 1. Circuito RC con un condensador**

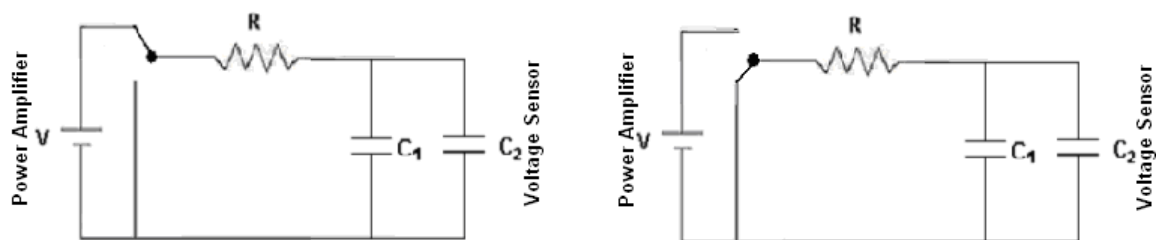
**1.4.-** Determine la constante de tiempo  $\tau$  del circuito RC mostrado en la figura 2



**Figura 2. Circuito RC con dos capacitores en serie**

Con los valores de las constantes  $\tau$  individuales y con el valor de la constante  $\tau$  de la conexión en serie, determine la capacitancia equivalente  $C_E$  a través de la expresión  $\tau = RC$  y concluya al respecto.

**1.5.-** Determine la constante de tiempo  $\tau$  del circuito mostrado en la figura 3 y repita el procedimiento anterior para determinar la capacitancia equivalente  $C_E$  de la conexión en paralelo y concluya al respecto.



**Figura 3. Circuito RC con dos capacitores en paralelo**

### *Actividad 2: Circuitos*

**2.1.-**Utilizando el mismo tablero de circuitos de la actividad anterior, arme un circuito en serie con dos ampolletas como resistencias y dos pilas como fuentes de energía.

Mida con un amperímetro la corriente total del circuito, la corriente que circula por cada ampolleta y verifique si se cumple la relación:  $I_{total} = I_1 = I_2$

Mida con un multitester la diferencia de potencial en los extremos de las pilas y luego en los extremos de cada ampolleta y verifique si se cumple la relación:  $V_{total} = V_1 + V_2 + V_3$

**2.2.-**Utilizando el mismo tablero de circuitos de la actividad anterior, arme un circuito en paralelo con las dos ampolletas como resistencias y pilas como fuentes de energía.

Mida con un amperímetro la corriente total del circuito, la corriente que circula por cada ampolleta y verifique si se cumple la relación:  $I_{total} = I_1 + I_2$

Mida con un multitester la diferencia de potencial en los extremos de las pilas y luego en los extremos de cada ampolleta y verifique si se cumple la relación:  $V_{total} = V_1 = V_2$



***Actividad 3: Ley de Ohm, materiales óhmicos y materiales no óhmicos***

**3.1.-**Utilizando el mismo tablero de circuitos de la actividad anterior, arme un circuito en serie con 1 alambre de konstantán como resistencia , pilas como fuentes de energía y un reóstato para variar el voltaje de la fuente.

Mida con un amperímetro la corriente que circula por el conductor y la diferencia de potencial en los extremos de éste.

Varíe el voltaje usando el reóstato y repita el procedimiento hasta obtener 6 valores de corriente y de voltaje. Tabule los datos y grafique  $V = f(I)$ .

Escriba la ecuación de la gráfica resultante y señale qué representa la pendiente de la recta.

De acuerdo a la Ley de Ohm, un material es óhmico si su resistencia no varía y el rango de validez de ésta ley es sólo si la gráfica  $V = f(I)$  es una recta.

**3.2.-** Repita la experiencia reemplazando el conductor (alambre de konstantán) por una ampollita y de acuerdo a la gráfica resultante, determine si la resistencia de la ampollita cumple con la ley de Ohm.

### 2.3.2 Guías de Laboratorio

Universidad de Tarapaca

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

#### Laboratorio N° 5: Magnetostática Electromagnetismo Ingeniería Plan Común

##### Objetivo:

- Estudiar algunas de las características básicas del campo magnético.
- Obtener experimentalmente la configuración del campo magnético en imanes.
- Estudiar experimentalmente el campo magnético creado por un alambre con corriente.
- Estudiar experimentalmente el campo magnético creado por una bobina con corriente.
- Estudiar las fuerzas magnéticas entre imanes y entre alambres con corriente.
- Determinar experimentalmente el valor del campo magnético terrestre

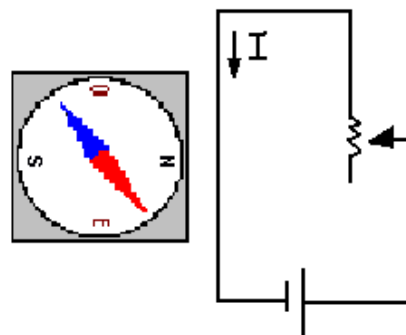
##### Actividad 1: Configuración del campo magnético en imanes y en bobinas con corriente.

La manera de visualizar los campos magnéticos es a través de limaduras de hierro y por la posición que adopta una brújula frente a la presencia de campos magnéticos existentes.

Dibuje las configuraciones de los campos magnéticos que están dispuestos en la mesa de trabajo del laboratorio y discuta con su grupo de trabajo las características más importantes que observa en ellos y determine la dirección de las líneas de campo en cada uno de los casos ayudándose con una brújula.

##### Actividad 2.- Experiencia de Oersted

Determinar y dibujar la forma del campo magnético existente en un conductor rectilíneo, utilizando una brújula. Observar que sucede con el campo magnético a



medida que la brújula se aleja del conductor.

**Actividad 3:** Estudio cualitativo del campo magnético variando el número de espiras para una corriente constante y para un número fijo de espiras y corriente variable.

Enrolle una vuelta de un alambre con corriente en un bastidor que rodea una placa de aluminio sobre la cual está puesta una de papel polar que ayudará a medir el ángulo de desviación de la aguja de la brújula puesta en el centro de la placa.

Inicie el estudio del campo magnético primero con una espira con corriente y ayudándose con una brújula, marque el ángulo de desviación de la aguja de ésta. Luego dejando constante la corriente aumente el número de espiras y compare el ángulo de desviación observado en la brújula con el caso anterior y concluya al respecto.

Repita la experiencia pero ahora deje constante el número de espiras y aumente el valor de la corriente unas tres veces y concluya respecto al valor del campo magnético de acuerdo a los ángulos de desviación marcados en el papel polar.

**Actividad 4.-** Fuerzas magnéticas entre alambres con corriente

Estudiar y dibujar las fuerzas magnéticas entre alambres con corriente en la misma dirección y en direcciones opuestas

**Actividad 5:** Estudio del campo magnético terrestre

El campo magnético en el centro de una bobina compuesta de N vueltas y cuyo radio es R está dado por:

$$B_B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

Entonces el campo magnético terrestre  $B_T$  puede ser determinado de la siguiente manera:

### 2.3.2 Guías de Laboratorio

- Se orienta el plano de la bobina a lo largo del meridiano magnético Norte – Sur.
- Al hacer circular corriente por la bobina, la aguja de la brújula se orientará a lo largo del vector que resulta de la suma vectorial de los campos  $B_T$  y  $B_B$ , formando un ángulo  $\alpha$  con la línea Norte- Sur. Luego se cumplirá que:

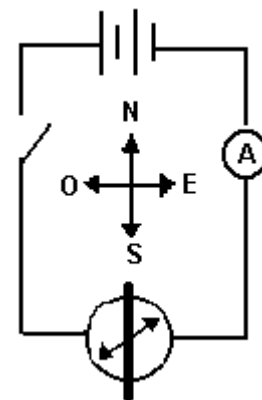
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu_0 N}{2RB_T} I$$

Donde N es el número de vueltas de la bobina, R es el radio de la bobina y  $\mu_0$  es la constante de permeabilidad magnética.

#### Procedimiento:

- Realizar el montaje que indica la figura y orientar la bobina y la brújula en la misma dirección del meridiano Norte – Sur.
- La aguja más larga es para medir el ángulo y debe estar inicialmente en cero.
- La aguja magnética esta pintada de Rojo – Negro que corresponde a polos Norte – Sur, respectivamente.

**Asegúrese que la fuente y el amperímetro estén lo más lejos de la brújula.**



- Conectar la fuente a la bobina de  $N=2$  vueltas y utilizar el amperímetro de 0 - 1 [A].
- Hacer circular una corriente I por el circuito.
- Leer cada valor de intensidad de corriente I correspondiente a un ángulo  $\alpha$ .
- Obtener 6 valores de corriente I y ángulo  $\alpha$  (**se recomienda no usar ángulos mayores de 60°**) y construir una tabla que contenga los resultados obtenidos.
- Calcular  $\operatorname{tg} \alpha$  y tabular los resultados. Graficar  $\operatorname{tg} \alpha$  v/s I.
- A partir de la pendiente del gráfico determine el campo magnético  $B_T$ . Comparar el  $B_T$  obtenido con el valor teórico.

Universidad de Tarapaca

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

Laboratorio N° 6: Campos magnéticos  
Electromagnetismo Ingeniería Plan Común

**Objetivos:**

- Determinar el campo magnético de un solenoide midiendo experimentalmente la fuerza sobre una espira con corriente puesta dentro del campo generado por el solenoide y analizar los factores que influyen en la magnitud de la fuerza.
- Estudiar experimentalmente el campo de las bobinas de Helmholtz utilizando teslámetro que está conectado a la sonda Hall.

**Actividad 1: Campo magnético de un solenoide (bobina)**

- 1.- Arme el circuito que muestra la figura, previa lectura de la guía, y luego que lo revise el profesor de laboratorio.
- 2.- Antes de conectar el circuito, asegúrese que la espira esté centrada, en equilibrio horizontal y en libertad de movimiento.
- 4.- Conecte la polaridad del solenoide y la espira de tal forma que la parte de la espira en el interior del solenoide experimente una fuerza hacia abajo.
- 5.- Realice un diagrama vectorial en el cual indique claramente la dirección y sentido de las corrientes, tanto en la espira como en el solenoide, campo magnético en el solenoide y fuerzas ejercidas sobre la espira. Considere en su análisis la expresión  $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$
- 6.- La corriente que debe circular por el solenoide es una corriente constante  $I_B = 4 \text{ [A]}$  y por la espira una corriente inicial  $I_E = 1 \text{ [A]}$ . Para ello, utilice los reóstatos que se encuentran en los circuitos respectivos.
- 7.- Para determinar la fuerza debida al campo magnético del solenoide, equilibre la espira colgando de su extremo exterior trozos de hilo.
- 8.- Equilibrada la espira, mida la masa del hilo utilizado y determine la magnitud de la fuerza magnética sobre la espira como:  $F_M = mg$ .

### 2.3.2 Guías de Laboratorio

**9.-** Repita el procedimiento dejando constante la corriente en el solenoide, pero variando la corriente en la espira para valores menores que 1 [A].

**10.-** Tabule los datos y grafique “**Fuerza magnética  $F_M$  en función de la corriente por la espira  $I_E$** ”. Exprese la fuerza en Newton y la corriente en Ampere.

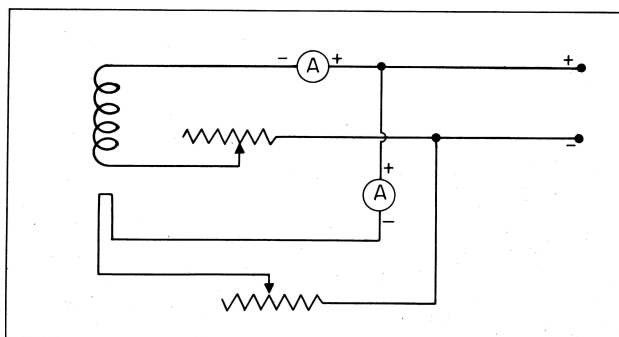
**11.-** Encuentre la relación matemática  $F_M = f(I_E)$  y comente qué representa la pendiente de la recta.

**12.-** Basándose en la expresión  $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$  y  $F_M = f(I_E)$ , determine la magnitud del campo magnético del solenoide y compare su valor con el obtenido usando la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 I_B n}{L_B}.$$

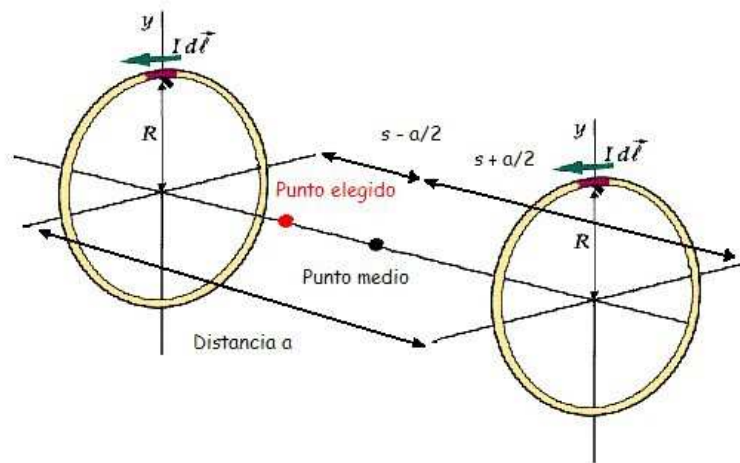
Datos:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[ \frac{N}{A^2} \right] = 4\pi \times 10^{-7} \left[ \frac{Wb}{Am} \right]$  = la permeabilidad magnética en el vacío;  $n =$

540 vueltas y el largo de la bobina  $L_B = 0,15$  m.



#### **Actividad 2:** Estudio del Campo magnético de las bobinas de Helmholtz (**Demostrativo**)

**Introducción.** El campo magnético creado por dos bobinas de Helmholtz puede ser complicado de hallar. Sin embargo, la solución es más sencilla si reducimos los puntos de medida a aquellos que se encuentran en su eje común. Tomando como base la expresión del campo magnético en una bobina podremos obtener el campo magnético en los puntos del eje que une sus centros. Siguiendo el esquema de la siguiente figura:



Podremos decir que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot \sqrt{\left[ R^2 + \left( s - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^3}}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot \sqrt{\left[ R^2 + \left( s + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^3}}$$

Obtenemos, pues, que la expresión del campo magnético en puntos del eje común de dos bobinas se corresponde con:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I \cdot r^2}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left[ r^2 + \left( s - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^3}} + \frac{1}{\sqrt{\left[ r^2 + \left( s + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^3}} \right\}$$

### 2.1. Montaje y ajuste de los elementos

El montaje necesario para realizar los dos experimentos en esta práctica se implementa un generador de tensión continua que proporciona el voltaje adecuado a un circuito formado por una o dos bobinas. Para poder ajustar la intensidad de corriente conectaremos en serie con las bobinas un amperímetro. Variando la diferencia de potencial en la salida del generador obtendremos la intensidad deseada. Esta corriente generará a su paso por las bobinas un campo magnético que podrá ser medido por un teslámetro conectado a una sonda Hall.

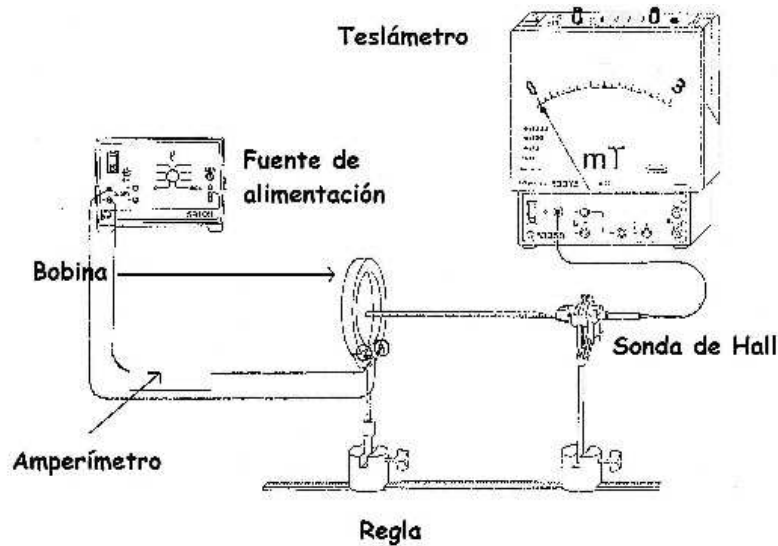
Es necesario calibrar el teslámetro para que las medidas tengan una precisión adecuada. Esto se hará de la siguiente manera:

- Aislamiento de la sonda Hall frente a cualquier campo externo y ajuste del cero de la escala.
- Calibrar la sonda Hall mediante un campo magnético conocido proporcionado por una bobina de calibrado.

### 2.2. Obtención experimental de la permeabilidad magnética del vacío $\mu_0$ .

El circuito está formado por el generador, el amperímetro y una única bobina. Su distribución será la de la siguiente figura:





Teniendo en cuenta lo anterior procederemos como sigue:

- Conectaremos adecuadamente el circuito.
- Situaremos la sonda de Hall en el centro de la bobina de forma que la pértiga que sustenta la sonda se encuentre en el plano perpendicular al que se encuentra la bobina.
- Tomaremos valores del campo magnético utilizando el teslámetro que está conectado a la sonda Hall. Anotaremos, al menos 10 valores uniformemente distribuidos, variando el valor de la corriente desde 0 hasta un valor que consideremos adecuado, no superior a 1A.
- Representaremos los valores del campo magnético en función de la corriente en una gráfica.
- Obtendremos los valores característicos de la recta de regresión y la representaremos igualmente en la gráfica anterior.

Sabemos que la expresión del campo magnético en el centro de la bobina se ajusta a la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I \cdot r^2}{2 \cdot \sqrt{(r^2 + s^2)^3}}$$

### 2.3.2 Guías de Laboratorio

Si hacemos constantes todos los valores de la formula (radio de bobinas, número de espiras) tendremos una expresión del tipo,  $B = k \cdot I$ , donde  $k$  es la pendiente de la recta que se obtendría de representar el valor del Campo magnético para diferentes valores de corriente. Como

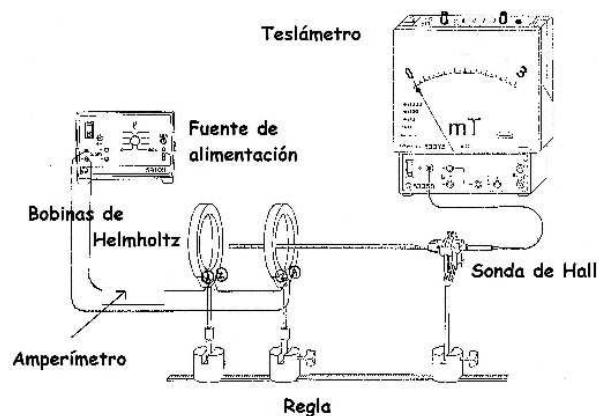
$$k = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot r^2}{2 \cdot \sqrt{(r^2 + s^2)^3}}$$

se obtendrá fácilmente la permeabilidad magnética del vacío. Ésta es:

$$\mu_0 = \frac{2 \cdot k \cdot \sqrt{(r^2 + s^2)^3}}{n \cdot r^2}$$

### 2.3. Comprobación de las características del campo magnético generado por dos bobinas de Helmholtz.

El circuito está formado por el generador, el amperímetro y dos bobinas. Su distribución será la de la siguiente figura:



Teniendo en cuenta lo anterior procederemos como sigue:

- Conectaremos adecuadamente el circuito.
- Situaremos la sonda de Hall en diferentes puntos a lo largo del eje común de las bobinas de forma que la pértiga que sustenta la sonda se encuentre situada tal y como muestra la figura.

Los siguientes pasos se repetirán tres veces. La primera para  $a = r$ , la segunda para  $a > r$  y la tercera para  $a < r$  :

- Tomamos valores del campo magnético utilizando el teslámetro que esta conectado a la sonda Hall. Anotaremos al menos 15 puntos variando el valor de la distancia del extremo de la sonda Hall al centro de ambas bobinas. El valor de la corriente será siempre el mismo, 600 mA.
- Representaremos los valores del Campo Magnético en función de la distancia.
- Obtendremos mediante una técnica adecuada la curva estandar que mejor se ajuste a los puntos experimentales.

Analizamos los resultados obtenidos en función de los elementos significativos que aparecen en cada una de las curvas (máximos, mínimos, puntos de inflexión, asíntotas, zonas constantes)

### 2.3.2 Guías de Laboratorio

Universidad de Tarapaca

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

#### Laboratorio N° 7: Inducción magnética Electromagnetismo Ingeniería Plan Común

##### **Objetivos:**

- Realizar experimentos para estudiar las características de la inducción magnética (ley de Faraday –Lenz.)
- Estudiar el principio de funcionamiento de los transformadores.
- Conocer el comportamiento de transformadores elevadores y reductores de tensión.
- Relacionar el número de vueltas con la tensión y la corriente.

##### **Actividad N° 1**

Conectar un sensor de voltaje a una bobina de 600 vueltas y con el programa de Data studio monitoree lo que sucede cuando introduce y saca un imán dentro de la bobina varias veces. Comente y dibuje lo que observa. Cambie la polaridad del imán y repita el procedimiento anterior, ¿qué observa ?.

Ahora deje quieto el imán y mueva la bobina acercándola y alejándola del imán. Concluya respecto a lo observado.

Ahora deje quieto el imán y la bobina. Explique lo que sucede y concluya respecto a lo observado en todo el experimento.

##### **Actividad N° 2**

Armar un imán artificial, utilizando una fuente de corriente continua, un reóstato y una bobina de 600 vueltas.

Mida la intensidad del campo magnético con un teslámetro.

Deje fijo el teslámetro dentro de la bobina y mueva el cursor del reóstato hacia adelante y hacia atrás. ¿qué observa en la lectura del teslámetro?

Luego introduzca un núcleo de hierro en la bobina. ¿Qué pasa con el campo magnético de acuerdo a lo que marca el teslámetro?. Concluya al respecto.

Repetir la experiencia anterior pero con corriente alterna, de manera que la diferencia de potencial de entrada sea la misma que para el caso continuo ¿Qué ocurre si ubica frente a la bobina una brújula?. Explique lo observado.

Ponga frente a la bobina con corriente alterna, una bobina que no está conectada a ninguna fem. Para estudiar los efectos del flujo magnético variable sobre esta bobina, conéctela al sensor de voltaje y observe y dibuje lo que sucede.

Reemplace el sensor de voltaje por una ampolleta y un reóstato conectados en serie con la bobina. Explique por qué se enciende la ampolleta. Estudie la luminosidad de la ampolleta moviendo el reóstato.

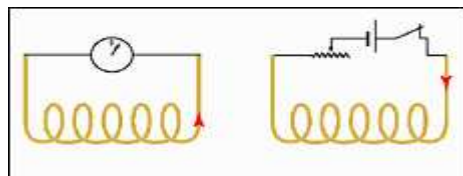
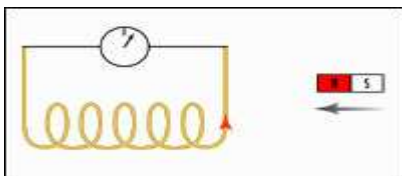
### **Actividad N° 3 Aplicaciones de la Ley de Faraday - Lenz**

Lo que interesa es **que varíe el flujo** que atraviesa la bobina conectada al miliamperímetro, **sin importar cuál sea la razón de ello**.

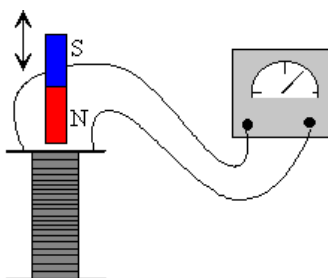
Las actividades realizadas anteriormente, se pueden resumir como se muestra en las figuras

- Introducir y sacar el imán de la bobina, probando con los dos polos
- Dejar fijo el imán y que sea la bobina la que se acerque y se aleje, probando también con ambos polos
- Abrir y cerrar un circuito accionando el interruptor
- Modificar la intensidad de corriente de un circuito mediante una resistencia variable o haciendo circular por él una corriente alterna (AC).

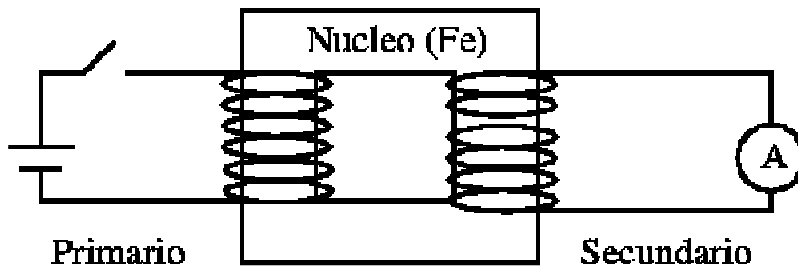
### 2.3.2 Guías de Laboratorio



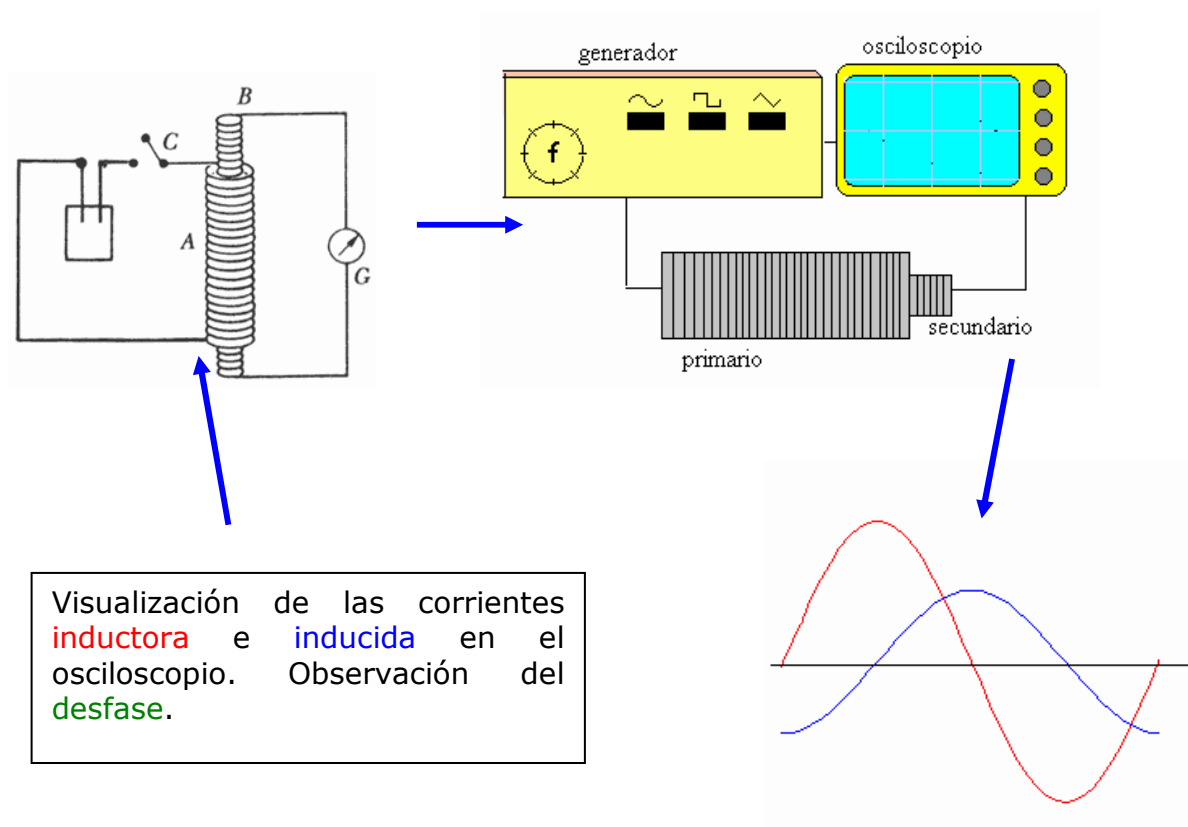
También conexión a AC



Puede resultar interesante realizar mediciones **con multímetros** en el primario y el secundario de un transformador, contrastar resultados y proporcionar una explicación sencilla, basada en la conservación de la energía.



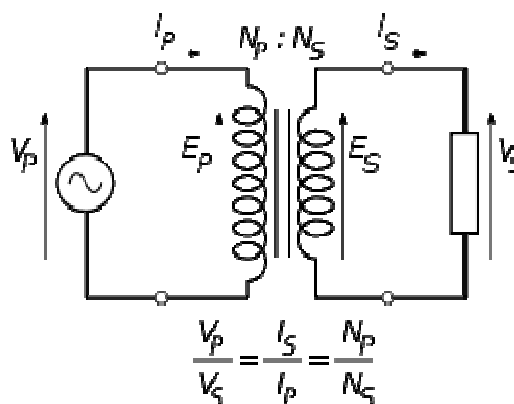
Así mismo, se puede plantear el siguiente montaje demostrativo, que hace uso de un osciloscopio y dos bobinados con número diferente de espiras (transformador).



El **propósito**, en todo caso, es **constatar cualitativamente**, de una u otra forma, **la ley de Faraday–Lenz**, en sus distintas perspectivas.

## Transformadores

### Esquema de transformadores



Conecte una fuente de corriente alterna a una bobina de  $N_1$  vueltas (circuito primario). Formar un segundo circuito con otra bobina de  $N_2$  vueltas (circuito secundario). Coloque ambas bobinas en un núcleo en U cerrado. Mida la intensidad de corriente con un

### 2.3.2 Guías de Laboratorio

amperímetro de corriente alterna y la caída de tensión en cada bobina con un voltímetro de corriente alterna.

Utilice reóstatos de  $85\ \Omega$  , amperímetros de 0-250 mA y de 0-1 A y Voltímetros de 0-10 Volt y de 0 -150 Volt según corresponda.

**Nota: el profesor debe revisar los circuitos antes de iniciar las mediciones.**

#### **Primer caso: Transformador elevador de voltaje y reductor de corriente**

$N_p = 300$  vueltas y  $N_s = 600$  vueltas

Repita la experiencia para:  $N_p = 300$  vueltas y  $N_s = 1200$  vueltas

#### **Segundo caso: Transformador reductor de voltaje y elevador de corriente**

$N_p = 600$  vueltas y  $N_s = 300$  vueltas.

Repita la experiencia para:  $N_p = 1200$  vueltas y  $N_s = 300$  vueltas

De acuerdo a los resultados de los casos estudiados verifique las relaciones:

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s} \quad \text{y} \quad \frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p}$$



